РАЗДЕЛ XVI. ПЕДАГОГИКА

Блюмин С.Л., Галкин А.В.

Непосредственные вычисление и проверка достигнутого минимума показателя качества в задаче оптимальной стабилизации*Липецкий государственный технический университет
(Россия, Липецк)*

doi: 10.18411/sr-10-06-2021-38

Аннотация

Данная работа носит методический характер. В ней описана методика непосредственных вычисления и проверки достигнутого минимума показателя качества в линейно-квадратичной задаче оптимальной стабилизации. Подобным методикам в распространенной литературе по теории управления уделено недостаточно внимания. Причинами может быть то, что, с одной стороны, такие вычисления и проверки являются «само собой разумеющимися», а с другой стороны, сопряжены с достаточно громоздкими расчетами. По последней причине методика проиллюстрирована на примере простейшей скалярной линейной стационарной сосредоточенной динамической системы.

Ключевые слова: линейно-квадратичная задача оптимальной стабилизации, синтез алгоритма оптимального управления, непосредственные вычисление и проверка достигнутого минимума.

Линейно-квадратичная задача оптимальной стабилизации может быть сформулирована в виде, указанном в § 5 Главы 6 из [1].

Задана линейная стационарная сосредоточенная динамическая система

$$\dot{x} = Ax + Bu, x(0) = x_0,$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m, t \in [0, \infty), A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, x – вектор состояния, u – вектор управления.

Задан квадратичный показатель качества

$$J\{x, u\} = \int_0^\infty \{x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)\}dt \rightarrow \min,$$

где $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}, R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ – положительно определенные матрицы.

Требуется синтезировать алгоритм оптимального управления, доставляющего минимум показателю качества и стабилизирующего систему так, чтобы $x(\infty) = 0$.

Решение задачи может быть представлено в виде алгоритма управления с отрицательной обратной связью и достигнутого минимума показателя качества, указанных в Теореме 5.2. из [1]:

$$u^* = -K^*x, K^* = R^{-1}B^T P^*, J_{\min} = x(0)^T P^* x(0),$$

где матрица P^* – положительно определенное решение квадратичного матричного алгебраического уравнения Лурье

$$PB R^{-1} B^T P - (A^T P + P A) - Q = 0.$$

Цель данной методической работы – описать и проиллюстрировать на простейшем примере методику непосредственных вычисления и проверки достигнутого минимума показателя качества, так как в прикладных задачах потребность в таких расчетах возникает.

Для непосредственного вычисления минимума показателя качества необходимо подставить в него оптимальную траекторию $\hat{x}(t)$ и оптимальное управление $\hat{u}(t)$.

Оптимальная траектория является решением системы, замкнутой управлением с отрицательной обратной связью

$$\dot{x} = Ax + B(-R^{-1}B^T P^*)x = (A - BR^{-1}B^T P^*)x, x(0) = x_0.$$

С учетом матричного алгебраического уравнения Лурье и обратимости положительно определенной матрицы P это уравнение может быть переписано в виде

$$P^* \dot{x} = (P^* A - P^* B R^{-1} B^T P^*)x = (P^* A - A^T P^* - P^* A - Q)x = -(A^T P^* + Q)x, x(0) = x_0$$

или

$$\dot{x} = -(P^{*-1} A^T P^* + P^{*-1} Q)x = \hat{A}x, x(0) = x_0.$$

Для подстановки в показатель качества требуется явная запись решения $\hat{x}(t)$ этого уравнения.

С использованием $\hat{x}(t)$ оптимальное управление запишется в виде

$$\hat{u}(t) = -K^* \hat{x}.$$

Для подстановки в показатель качества требуется и его явная запись.

Непосредственное вычисление минимума показателя качества выполняется по формуле

$$\hat{J} = J\{\hat{x}, \hat{u}\} = \int_0^\infty \{\hat{x}^T(t) Q \hat{x}(t) + \hat{u}^T(t) R \hat{u}(t)\} dt.$$

В результате должно выполняться соотношение

$$\hat{J} = J_{\min}.$$

Непосредственную проверку того, что достигнут именно минимум показателя качества, можно выполнить по методике, подсказанной примером 8.1.4. из [2]. Берутся функции $x(t)$ и $u(t)$ такие, чтобы пара $(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) = (\hat{x}(t) + x(t), \hat{u}(t) + u(t))$ удовлетворяла условиям задачи; для этого нужно, чтобы $x(0) = 0$, а $u(t)$ было решением уравнения $\dot{x} = Ax + Bu$ относительно $u(t)$; последнее можно выполнить, например, с помощью псевдообращения, представленного в Главе II из [3]:

$$u(t) = B^+(\dot{x} - Ax).$$

Для непосредственной проверки минимума следует убедиться в том, что

$$\tilde{J} = J(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) \geq J(\hat{x}(t), \hat{u}(t)) = \hat{J}.$$

Рассматривается разность

$$\begin{aligned} \tilde{J} - \hat{J} &= J(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) - J(\hat{x}(t), \hat{u}(t)) = \\ &= \int_0^\infty \{(\hat{x} + x)^T Q(\hat{x} + x) + (\hat{u} + u)^T R(\hat{u} + u) - \hat{x}^T Q \hat{x} - \hat{u}^T R \hat{u}\} dt = \\ &= \int_0^\infty \{\hat{x}^T Q x + x^T Q \hat{x} + x^T Q x + \hat{u}^T R u + u^T R \hat{u} + u^T R u\} dt \geq \\ &\geq \int_0^\infty \{(\hat{x}^T Q x + x^T Q \hat{x}) + (\hat{u}^T R u + u^T R \hat{u})\} dt. \end{aligned}$$

Последний переход обоснован тем, что в силу положительной определенности матриц Q и R слагаемые $x^T Q x, u^T R u$ положительны. Проверка завершается обоснованием того, что последний интеграл неотрицателен.

Следует отметить, что вычисление явных записей $\hat{x}(t)$, $\hat{u}(t)$, а затем $\hat{J}$, u , $\tilde{J}$, $\tilde{J} - \hat{J}$ и обоснование того, что последний интеграл неотрицателен, сопряжены с достаточно громоздкими расчетами. По этой причине проиллюстрируем методику на примере простейшей скалярной линейной стационарной сосредоточенной динамической системы.

Задана скалярная линейная стационарная сосредоточенная динамическая система

$$\dot{x} = ax + bu, x(0) = x_0,$$

где $a, b, x(t), u(t) \in \mathbb{R}$, $t \in [0, \infty)$.

Задан квадратичный показатель качества

$$J\{x, u\} = \int_0^\infty \{qx^2 + ru^2\} dt, q, r > 0 \rightarrow \min.$$

Требуется синтезировать алгоритм оптимального управления, доставляющего минимум показателю качества и стабилизирующего систему так, чтобы $x(\infty) = 0$.

Решение, в соответствии с вышесказанным, может быть представлено в виде:

$$u^* = -k^* x, k^* = bp^*/r \Rightarrow u^* = -(bp^*/r)x, J_{\min} = p^* x_0^2.$$

где $p^* > 0$ – решение квадратного уравнения

$$(b^2/r)p^2 - (2a)p - q = 0.$$

Это решение в силу

$$D = 4 \cdot a^2 + 4 \cdot (b^2/r) \cdot q > 4a^2 > 0, \sqrt{D} > 2a,$$

можно записать в виде

$$p^* = p_1^* = \frac{2a + \sqrt{D}}{2(b^2/r)} > 0$$

или, при не очень ограничивающем предположении $a > 0$, позволяющем вынести из под корня ar ,

$$p^* = \frac{ar + \sqrt{a^2 r^2 + b^2 q r}}{b^2} = \frac{ar \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \left(\frac{q}{r}\right)} \right)}{b^2}.$$

Для дальнейшего удобства вводится обозначение

$$k = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \left(\frac{q}{r}\right)}, a^2 r + b^2 q = a^2 k^2 r,$$

с использованием которого при сделанном предположении

$$\hat{p} = p^* = \frac{ar}{b^2} (1 + k),$$

$$u^* = -\frac{b}{r} \cdot \frac{ar}{b^2} (1 + k)x = -\frac{a}{b} (1 + k)x.$$

Замкнутая система

$$\dot{x} = ax - b \frac{a}{b} (1 + k)x = -akx.$$

Оптимальная траектория

$$\hat{x} = x_0 e^{-akt}.$$

Оптимальное управление

$$\hat{u} = -\frac{a}{b}(1+k)x_0 e^{-akt}.$$

Минимум показателя качества в соответствии с вышесказанным

$$J_{\min} = \frac{ar}{b^2}(1+k)x_0^2.$$

Непосредственное вычисление минимума показателя качества:

$$\begin{aligned} \hat{J} = J\{\hat{x}, \hat{u}\} &= \int_0^\infty \{q\hat{x}^2 + r\hat{u}^2\}dt = \int_0^\infty \{qx_0^2 e^{-2akt} + r\frac{a^2}{b^2}(1+k)^2 x_0^2 e^{-2akt} u^2\}dt = \\ &= \left[q + r\frac{a^2}{b^2}(1+k)^2 \right] x_0^2 \int_0^\infty e^{-2akt} dt = \left[q + r\frac{a^2}{b^2}(1+k)^2 \right] \frac{e^{-2akt}}{-2ak} \Big|_0^\infty x_0^2 = \\ &= \frac{q + r\frac{a^2}{b^2}(1+k)^2}{2ak} x_0^2 = \frac{(qb^2 + ra^2) + 2ra^2k + ra^2k^2}{2akb^2} = \\ &= \frac{ra^2k^2 + 2ra^2k + ra^2k^2}{2akb^2} x_0^2 = \frac{2ra^2k^2 + 2ra^2k}{2akb^2} x_0^2 = \frac{ar}{b^2}(1+k)x_0^2 = J_{\min}. \end{aligned}$$

Для проверки используем

$$\tilde{x} = \hat{x} + x, \tilde{u} = \hat{u} + u.$$

Для них

$$\dot{\tilde{x}} = a\tilde{x} + b\tilde{u}, \dot{\hat{x}} + \dot{x} = a\hat{x} + ax + b\hat{u} + bu, \dot{x} = ax + bu, x(0) = 0, x(\infty) = 0,$$

Откуда $u = \frac{\dot{x} - ax}{b}.$

Рассматривается разность

$$\begin{aligned} J\{\tilde{x}, \tilde{u}\} - J\{\hat{x}, \hat{u}\} &= \int_0^\infty \{q(\hat{x} + x)^2 + r(\hat{u} + u)^2\}dt - \int_0^\infty \{q\hat{x}^2 + r\hat{u}^2\}dt = \\ &= \int_0^\infty \{q\hat{x}^2 2q\hat{x}x + qx^2 + r\hat{u}^2 + 2r\hat{u}u + ru^2 - q\hat{x}^2 - r\hat{u}^2\}dt = \\ &= \int_0^\infty \{2q\hat{x}x + qx^2 + 2r\hat{u}u + ru^2\}dt > 2 \int_0^\infty \{q\hat{x}x + r\hat{u}u\}dt = \\ &= 2 \int_0^\infty \{q\hat{x}x + r(-\frac{a}{b}(1+k))\hat{x} \frac{\dot{x} - ax}{b}\}dt = \\ &= 2 \int_0^\infty \left\{ \frac{(qb^2 + ra^2) + ra^2k}{b^2} \hat{x}x - r\frac{a}{b^2}(1+k)\hat{x}\dot{x} \right\}dt = \\ &= 2 \int_0^\infty \left\{ \frac{ra^2k^2 + ra^2k}{b^2} \hat{x}x - r\frac{a}{b^2}(1+k)\hat{x}\dot{x} \right\}dt = 2\frac{ra(1+k)}{b^2} \left\{ \int_0^\infty ak\hat{x}xdt - \int_0^\infty \hat{x}\dot{x}dt \right\} = \end{aligned}$$

(после взятия 2-го интеграла по частям с учетом начальных условий для x и того, что $\dot{\hat{x}} = -ak\hat{x}$)

$$= 2 \frac{ra(1+k)}{b^2} \left\{ \int_0^\infty ak\hat{x}x dt - \left| \begin{matrix} u = \hat{x} & dv = \dot{x} dt \\ du = \dot{\hat{x}} dt & v = x \end{matrix} \right| = \left[\hat{x}x \right]_0^\infty - \int_0^\infty \dot{\hat{x}}x dt \right\} =$$

$$= 2 \frac{ra(1+k)}{b^2} \left\{ \int_0^\infty ak\hat{x}x dt - \int_0^\infty ak\hat{x}x dt \right\} = 0.$$

Таким образом показано, что $J\{\tilde{x}, \tilde{u}\} - J\{\hat{x}, \hat{u}\} > 0, J\{\tilde{x}, \tilde{u}\} > J\{\hat{x}, \hat{u}\}$.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Липецкой области в рамках научного проекта 19-48-480009-р_а.

1. Первозванский, А.А. Курс теории автоматического управления [Текст] / А.А. Первозванский. – М.: Наука, 1986. – 616 с.
2. Алексеев, В.М. Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи [Текст] / В.М. Алексеев, Э.М. Галеев, В.М. Тихомиров. – М.: Наука, 1984. – 288 с.
3. Погодаев, А.К. Оптимизация. Псевдообращение. Итерации и рекурсии [Текст] / А.К. Погодаев, С.Л. Блюмин, С.П. Миловидов, А.С. Сысоев. – Липецк: ЛГТУ, 2015. – 195 с.

Борисенко О.А.

Влияние холодного охмеления на дрожжи *Saccharomyces cerevisiae*

ВНИИПБиВП – филиал ФГБНУ «ФНЦ пищевых систем им. В.М.Горбатова»

РАН

(Россия, Москва)

doi: 10.18411/sr-10-06-2021-39

Аннотация

В представленной работе исследуется влияние холодного охмеления на физиологическое состояние дрожжей. В процессе исследований проводились модельные опыты по холодному охмелению при температуре 5°C и 20°C с применением хмеля Магнум и Тетнангер и двух рас пивоваренных дрожжей *Saccharomyces cerevisiae*: Rh – низового брожения и Nottingham (Nt) – верхового брожения. Показано, что условия холодного охмеления одинаково воздействуют на дрожжи низового и верхового брожения с точки зрения влияния на физиологическое состояние и критическое влияние на процесс оказывает температура. Выявлено положительное влияние пониженных температур на жизнедеятельность дрожжей и их физиологическое состояние.

Ключевые слова: пиво, дрожжевая клетка, холодное охмеление, температура, гликоген.

Abstract

In the presented work, the influence of dry hopping on the yeast physiological state is investigated. During the research, model experiments on dry hopping at a temperature of 5°C and 20°C were carried out using Magnum and Tetnanger hops and two brewer's yeast strains *Saccharomyces cerevisiae*: Rh – lager fermentation and Nottingham (Nt) - ale fermentation. It is shown that the dry hopping conditions have the same effect on lager and ale fermentation yeast from the point of view of the physiological state effect, and temperature has a critical effect on the process. The positive effect of low temperatures on the yeast vital activity and their physiological state was revealed.