РАЗДЕЛ I. МАТЕМАТИКА

Аксёнов В.В.

О дифференциальных уравнениях естественного электромагнитного поля, восходящих к дифференциальным уравнениям Максвелла-Паркера-Моффата и их свойствах

Институт вычислительной математики и математической геофизики
(Россия, Новосибирск)

doi: 10.18411/sr-10-06-2018-01

idsp: 000001:sr-10-06-2018-01

1. Введение

1.1 Дифференциальные уравнения Максвелла в практической системе единиц [1, 2].

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot (\mathbf{B}, \mathbf{H}) = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{j}$ – полный электрический ток с учетом токов смещения и сторонних токов, $\mathbf{H}, \mathbf{E}$ – напряженности магнитного и электрического полей, $\mathbf{B}, \mathbf{D}$ – магнитная и электрическая индукции, μ, ε – магнитная и диэлектрическая проницаемости.

1.2 Космические магнитные поля [3–7].

$$\nabla \times \mathbf{H}_T = \mathbf{H}_P, \quad \nabla \times \mathbf{H}_P = \chi \mathbf{H}_T, \quad \nabla \cdot (\mathbf{H}_P, \mathbf{H}_T) = 0. \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{H}_P$ – силовое полоидальное магнитное поле, $\mathbf{H}_T$ – несиловое тороидальное магнитное поле. Второе уравнение в (2) введено в [4, 6] по аналогии с уравнением гидродинамики $\nabla \times \mathbf{V} = \chi \mathbf{V}$, где $\mathbf{V}$ – скорость течения жидкости. При $\chi = \text{const}$ будет течение Тркалиан [7], при χ – переменном – течение Бельтрами [7].

1.3 Дифференциальные уравнения естественного электромагнитного поля Земли [8, 9].

$$\nabla \times \mathbf{H}_P = \mathbf{j}_T + \mathbf{j}_T^{CT}, \quad \nabla \times \mathbf{H}_T = \mathbf{H}_P, \quad \nabla \times \mathbf{E}_T = -\frac{\partial \mathbf{B}_P}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{E}_P = 0, \\ \nabla \cdot (\mathbf{B}_P, \mathbf{H}_T, \mathbf{H}_P, \mathbf{E}_T) = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{D}_{P,T} = \rho \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{j}_T, \mathbf{j}_T^{CT}$ – тороидальные токи и сторонние тороидальные токи в ионосфере и в районе жидкого ядра Земли, ρ – плотность электрических зарядов.

2. Проблемы приемственности трех электродинамик

Проблемы применимости трех электродинамик позволяют выявить: эффект Дж. Лармора [11] – $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + [\mathbf{V} \times \mathbf{B}]$, где $\mathbf{V}$ – скорость проводящей жидкости или плазмы, или скорость одной координатной системы относительно другой, и критерий подобия Рейнольдса – магнитное число Рейнольдса $R_m = l\mu\sigma|\mathbf{V}|$, где l – характерный размер области с магнитным полем.

Для этого необходимо объединить первые два уравнения из (1), записав их в виде:

$$\nabla \times \mu \mathbf{H} = \mu \sigma \mathbf{E}, \quad \nabla \times (\mathbf{E} + [\mathbf{V} \times \mathbf{B}]) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (4)$$

Здесь μ – магнитная проницаемость, σ – удельная проводимость. В результате получим:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{\mu\sigma} \Delta \mathbf{B} - \nabla \times [\mathbf{V} \times \mathbf{B}]. \quad (5)$$

Уравнение (5) обычно называют уравнением индукции с динамо-слагаемым.

2.1. В технической и теоретической электродинамике на Земле из-за малых характерных размеров l критерий подобия принимает значение порядка единицы $R_m \approx 1$. Поэтому в уравнении (5) можно исключить второе слагаемое в правой части. В результате возникает уравнение:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{\mu\sigma} \Delta \mathbf{B}, \quad (6)$$

которое обычно называют уравнением диффузии магнитного поля или уравнением теплопередачи в термодинамике.

2.2. В космической электродинамике критерий подобия равен $R_m \approx 10^{12} \div 10^{17}$. Поэтому в уравнении (5) можно исключить первое слагаемое в правой части и получить уравнение [3-7, 10]:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times [\mathbf{V} \times \mathbf{B}], \quad (7)$$

магнитное поле в котором обычно называют гидромагнитным.

2.3. В естественном электромагнитном поле на Земле критерий подобия заключен в пределах $R_m \approx 10^3 \div 10^5$ [4, 10]. Поэтому из уравнения (5) нельзя исключать слагаемые в правой части. В связи с этим в нем проявляются как техническая, так и гидромагнитная электродинамика. Кроме того, уравнение (5) в общем виде неразрешимо в элементарных функциях или квадратурах в том смысле, что по известной скорости $\mathbf{V}$ нельзя определить индукцию $\mathbf{B}$ и наоборот. Эти обстоятельства требуют искать иные пути получения приемлемых решений для интерпретации данных экспериментов в естественном электромагнитном поле. Многие варианты приближенных решений (5) известны в магнитной гидродинамике.

2.4. Важнейшими свойствами трех выше обозначенных электродинамик являются следующие.

В основе технической электродинамики из-за малых $R_m \approx 1$ превалирует индукция (1), (6) [1, 2].

В космической электродинамике из-за больших $R_m \approx 10^{12} \div 10^{17}$ основополагающим является динамо-возбуждение (2), (7) [4].

В естественном электромагнитном поле присутствуют как индуктивные, так и гидромагнитные поля из-за $R_m \approx 10^3 \div 10^5$ (5) [10].

В технической электродинамике электромагнитные поля возбуждаются электрическими токами (l мало).

В космической электродинамике возбуждение осуществляется за счет взаимной генерации полоидальных и тороидальных магнитных полей (в режиме динамо-возбуждения) (l большое).

В естественном электромагнитном поле электромагнитное поле возбуждается тороидальными электрическими токами, расположенными в тонкой ионосфере или обтекающими твердое ядро Земли в зоне F (l среднее) [10].

В земной электродинамике вихри тороидального магнитного поля $\mathbf{H}_T$ могут создавать полоидальное магнитное поле, не создавая электрический ток, согласно первому уравнению (2), при любой исходной его напряженности. В то время как вихри полоидального гидромагнитного поля, согласно второму уравнению из (2), создают тороидальное магнитное поле только при значительных напряженностях из-за малого коэффициента $\chi \approx 10^{-11}$. Кроме того, по нашей оценке для Земли: $\mathbf{H}_T$ должно

превосходить H_p на Земле в 100 раз. По оценке У. Паркинсона [17, с. 166] это превосходство должно быть в 500 раз. Таким образом, самогенерация гидромагнитных полей H_T и H_p на Земле воспроизводится только в токамаках, где $|H_T| \gg |H_p|$ в миллионы раз [9].

3. Связь естественного электромагнитного поля с техническими и гидромагнитными электромагнитными полями

Из-за неразрешимости уравнения (5) в естественном электромагнитном поле для получения решения следует воспользоваться единственной возможностью, следующей из третьего уравнения (1). При любых критериях подобия остается неизменным уравнение $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ в связи с отсутствием магнитных зарядов в барионной вселенной, в том числе и на Земле. Поэтому этот факт необходимо использовать для построения нужных определений и получения решений. Для начала необходимо ввести цепочку равенств [8-10]:

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} = (Q\mathbf{r}) + \nabla \times (Q\mathbf{r}). \quad (8)$$

Здесь $\mathbf{A}$ – векторный потенциал. Последнее уравнение в (8) есть тороидальное ортогональное разложение векторного потенциала [9]. В уравнении (8) функции $\mathbf{A}, Q \in C^\infty$ в остальном произвольны.

Тороидальное разложение векторного потенциала позволяет, следуя [6], ввести в рассмотрение тороидальное магнитное поле H_T и полоидальное H_p в гидромагнитной электродинамике (пункт 2):

$$\mathbf{H}_T = \nabla \times (Q\mathbf{r}), \quad \mathbf{H}_p = \nabla \times \nabla \times (Q\mathbf{r}). \quad (9)$$

Определения (9) позволяют с помощью тождественных соотношений доказать справедливость уравнений (2) и определить значения параметра χ в них для постоянных и переменных гидромагнитных полей [8]:

$$\nabla \times \mathbf{H}_T = \nabla \times \nabla \times (Q\mathbf{r}) \equiv \mathbf{H}_p, \quad \nabla \times \mathbf{H}_p = \nabla \times \nabla \times \nabla \times (Q\mathbf{r}) = -\nabla \times (\Delta Q\mathbf{r}) \equiv \chi \mathbf{H}_T. \quad (10)$$

Здесь $\Delta Q = -\chi Q$ при $t = 0$, $\chi = \gamma / \eta$, где γ – скорость диффузии поля, $\eta = 1 / \mu\sigma$ – магнитная вязкость; при $t > 0$, $\chi = (i\omega\mu\sigma)^{1/2}$, где ω – круговая частота переменного поля.

Определения (9) и (10), тем не менее, требуют указать источник полей H_T и H_p в земной электродинамике. В космических магнитных полях, согласно (4), источником H_T и H_p являются: турбулентность, конвекция и неравномерное вращение космических объектов в режиме динамо-возбуждения и самогенерации этих полей. Для земной электродинамики такие источники проблематичны [12]. Более того, при интерпретации спокойных солнечно-суточных вариаций земного магнетизма обнаружены тороидальные электрические токи в ионосфере, поддерживаемые ветрами в ней [13], а также тороидальные токи, обтекающие твердое ядро Земли [14]. Поэтому в качестве источника H_T и H_p в земной электродинамике следует выбрать электрические токи. В [8] на этот счет доказана следующая теорема.

Теорема 1. Источником полоидального H_p и тороидального H_T магнитных полей являются сферические (тороидальные) компоненты полного электрического тока, если $\mathbf{j} \neq 0$.

Сферичность электрических токов есть основополагающее свойство для возбуждения им H_p и H_T . Кроме того эта теорема объединяет все три электродинамики, так как указывает источник тороидального и полоидального магнитных полей в виде сферического электрического тока $\mathbf{j}_T^{CT}$. Электрический ток все-таки в основе любых магнитных полей как на Земле, так и в космосе. Это

утверждение не является новым. Значительно раньше на это обратил внимание Х. Альвен [15] и затем неоднократно доказывал это в противовес Ю. Паркеру, который отказался от электрических токов в своей книге о космических магнитных полях [4].

Объединяя сущности и формулы трех электродинамик для земной электродинамики можно получить исходные уравнения (3) [8, 9]. Далее, объединяя в (3) тороидальные токи в полный ток $\bar{\mathbf{j}}_T = \mathbf{j}_T + \mathbf{j}_T^{CT}$, а тороидальные и полоидальные магнитные поля в полное поле $\mathbf{H} = \mathbf{H}_p + \mathbf{H}_t$, можно записать на основании (1) и (3) следующую цепочку равенств:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \bar{\mathbf{j}}_T, \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \bar{\mathbf{j}}_T, \quad \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} = \bar{\mathbf{j}}_T, \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad \Delta \mathbf{A} = \bar{\mathbf{j}}_T. \quad (11)$$

Решением последнего уравнения в (11) является аналог известного интеграла, выражающего закон Био-Савара:

$$\mathbf{A} = \int_W \frac{\bar{\mathbf{j}}_T(p)}{r(p, q)} dw'. \quad (12)$$

Здесь W – объем области с электрическим током. Работа с интегралом (12) путем его разложения по сфере опубликована в [16]. В этой работе показана связь технической электродинамики (и естественно индукции) с гидромагнитными полями на шаре. Эта связь обеспечивается формулами перехода от скалярного потенциала Q , обеспечивающего введение гидромагнитных полей с векторным потенциалом тороидального электрического тока (12).

$$\begin{aligned} H_{p\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} (Qr) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r A_\varphi, & H_{p\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (Qr) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r A_\theta \\ H_{pr} &= -\frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial (Qr)}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial (Qr)}{\partial \varphi} \right) = \\ &= -\frac{1}{r \sin \theta} \left(-\frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\sin \theta} A_\varphi + \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

$$E_{T\theta} = -i\omega\mu_0 \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (Qr) = -i\omega\mu_0 A_\theta, \quad E_{T\varphi} = -i\omega\mu_0 \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (Qr) \right) = -i\omega\mu_0 A_\varphi,$$

$$H_{T\theta} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (Qr) = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} A_r, \quad H_{T\varphi} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (Qr) = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} A_r,$$

$$\begin{aligned} E_{p\theta} &= \frac{1}{\sigma'} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 (Qr) = \frac{1}{\sigma'} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 A_r, \\ E_{p\varphi} &= \frac{1}{\sigma'} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 (Qr) = \frac{1}{\sigma'} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 A_r, \\ E_{pr} &= \frac{1}{\sigma'} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 (Qr) = \frac{1}{\sigma'} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 A_r. \end{aligned}$$

Формулы (13) объединяют две, казалось бы, различные электродинамики Максвелла и Ю. Паркера в рамках третьей электродинамики – естественного электромагнитного поля [8, 16].

4. Силовые и не силовые электромагнитные поля

4.1. В технической электродинамике считается, что электромагнитные поля только силовые: магнитные поля в источниках обладают силой Лоренца, электрические создают отличную от нуля э.д.с. индукции.

$$\mathbf{F}_L = [\mathbf{j} \times \mathbf{B}] = [\sigma \mathbf{E} \times \mu \mathbf{H}] \neq 0, \quad \text{э.д.с.} = \oint_L (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}) = \oint_W (\nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}) = -\mu \oint_W \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \right) \neq 0. \quad (14)$$

4.2. В космической электродинамике существуют несиловые и силовые магнитные поля, создающие взаимную генерацию (2):

– несиловая часть:

$$\mathbf{F}_L = [\chi \mathbf{H}_T \times \mu \mathbf{H}_T] \equiv 0. \quad (15)$$

Сила Лоренца равна нулю из-за совпадающего направления в векторном произведении (15).

– силовая часть:

$$\mathbf{F}_L = [\sigma \mathbf{E}_T \times \mu \mathbf{H}_P] \neq 0. \quad (16)$$

4.3. В естественном электромагнитном поле имеют место как силовые $\mathbf{H}_P, \mathbf{E}_T$, так и несиловые $\mathbf{H}_T, \mathbf{E}_P$ электромагнитные поля:

– силовая часть:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{F}}_L &= [\mathbf{j}_T \times \mathbf{B}_P] = [\sigma \mathbf{E}_T \times \mu \mathbf{H}_P] \neq 0, \\ \text{э.д.с.} &= \oint_L (\mathbf{E}_T \cdot d\mathbf{l}) = \oint_W (\nabla \times \mathbf{E}_T \cdot d\mathbf{s}) = -\mu \oint_W \left(\frac{\partial \mathbf{H}_P}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \right) \neq 0. \end{aligned} \quad (17)$$

– несиловая часть:

$$\mathbf{F}_L = [\chi \mathbf{H}_T \times \mu \mathbf{H}_T] \equiv 0, \quad \text{э.д.с.} = \oint_L (\mathbf{E}_P \cdot d\mathbf{l}) = \oint_W (\nabla \times \mathbf{E}_P \cdot d\mathbf{s}) \equiv 0. \quad (18)$$

Здесь $\mathbf{E}_T = -i\omega\mu\nabla \times (\mathbf{Qr})$, $\mathbf{E}_P = \frac{1}{\sigma} \nabla \nabla \cdot (\mathbf{Qr})$.

Существование несиловых электромагнитных полей в естественном электромагнитном поле объясняет наличие беспотенциальных полей в атмосфере Земли [13, 14], зафиксированных экспериментально.

Заключение

Анализ трех электродинамик на Земле и в космосе показал их глубинную преемственность. Естественное электромагнитное поле на Земле включает характерные черты космической электродинамики и электродинамики Максвелла, объединенные теоремой о полном сферическом электрическом токе. В этом смысле космическая электродинамика электрических токов Х. Альвена носит более приближенный к природе характер, как в теоретическом плане, так и в приложении к естественному электромагнитному полю Земли по сравнению с космической электродинамикой Ю. Паркера, исключившего из рассмотрения электрический ток и, естественно, первое уравнение Максвелла.

1. В. Смайт. Электродинамика и электростатика. – М.: Изд. Ин. Лит., 1954, 606 с.
2. Дж.А. Стрэттон. Теория электромагнетизма. М.-Л.: ОГИЗ-Гостехиздат, 1948, 539 с.
3. M. Steenbeck, F. Krause. On the dynamo theory of stellar and planetary magnetic field, I.A.C. dynamos of solar type // Astron Nachr., 1969, p. 49–84.
4. E.N. Parker. Cosmical magnetic field. In 2 Vol. Oxford: CLARENDON PRESS, 1979, 1088 p.
5. К.-Н. . On the electrodynamics of turbulent fluids under the influence of Coriolis forces. // Monats. Dt. Acad. Wiss, 1969, p. 194–201.
6. Г. Моффат. Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. М.: Мир, 1980, 334 с.
7. G.E. Marsh. Force-Free Magnetic Field: Solution, Topology and Applications. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 1996, 157 p.
8. V.V. Aksenov. Non-Force and Force Electromagnetic Fields. // Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii, Fizika, 2015, No. 3, pp. 3–10.
9. V.V. Aksenov. The Toroidal Decomposition of the Vector Potential of a Magnetic Field and its Applications. // Moscow University Physics Bulletin, 2015, Vol. 70, No. 6, pp. 558–565.

10. В.В. Аксенов. Электродинамика наблюдаемого на Земле естественного электромагнитного поля. // Изв. Вузов. Геология и разведка, 2016, №2, с. 50–60.
11. J. Larmor. How could a rotating body such as the Sun become a magnet. // Rep. Brit. Assoc. SCL., 1919, p. 60–159.
12. Д.Д. Соколов, Р.А. Степанов, П.Г. Фрик. Динамо на пути от астрофизических моделей к лабораторному эксперименту. // УФН, 2014, т. 184, № 3, с. 313–335.
13. Н.П. Бенькова. Спокойные солнечно-суточные вариации земного магнетизма. М.-Л.: Гидрометеиздат, 1941, 71 с.
14. В.В. Аксенов. Об источнике главного геомагнитного поля. Часть 2. // Изв. Вузов. Геология и разведка, 2012, №5, с. 54–60.
15. H. Alfven. Cosmical Electrodynamics. Oxford: University Press, 1950, 240 p.
16. В.В. Аксенов. Моделирование магнитного поля источников, находящихся в шаре и вне его. // Математическое моделирование, 2015, т. 27, №8, с. 111–126.
17. У.Д. Паркинсон. Введение в геомагнетизм. – М.: Мир, 1986, 527 с.