РАЗДЕЛ VIII. ФИЗИКА

Иванов А.А.

Закрепление струны и протекание на ориентированной решетке

Сибирский федеральный университет
(Россия, Красноярск)

doi: 10.18411/sr-10-04-2021-28

Аннотация

Методом Монте-Карло исследуется плоское скольжение струны, взаимодействующей с точечными центрами закрепления. Устанавливается принадлежность рассматриваемой задачи к классу задач теории протекания. Исследуется критическое поведение заметной площади при скольжении струны. Определены порог протекания и критический индекс для заметной струной площади. Создан алгоритм исследования протекания на ориентированной квадратной решетке на основе алгоритма поиска механически устойчивой конфигурации струны. С помощью созданного алгоритма определены порог протекания на ориентированной решетке и критический индекс для заметной площади. Исследованы детальные отличия задач поиска механически устойчивой конфигурации струны и поиска траектории протекания на решетке.

1. Введение

Задача описания закрепления струны силовым полем центров пиннинга возникает во многих областях физики. Это теория коэрцитивности магнитных материалов при движении доменных стенок в тонких пленках [1–5], теория потерь сегнетоэлектриков при переполяризации [6], и проблема критического скалывающего напряжения в теории скольжения дислокаций [7–12], вихри Абрикосова в сверхпроводниках второго рода [13]. В данной работе ставится задача сравнения процесса скольжения струны и процесс поиска траектории протекания в одной из классических решеточных задач теории протекания (ориентированная квадратная решетка [14]). Для ответа на вопрос об аналогии этих процессов мы выясним особенности их критических параметров и сравним функции распределения скачков струны и скачков оборванной связи в решетке.

Рассмотрим натянутую с силой λ струну со свободными концами, которая может скользить по плоскости XOY . На плоскости задано неоднородное потенциальное силовое поле $f(X, Y)$, представляющее собой суперпозицию точечных центров закрепления. Пусть h – плотность силы внешнего давления. Внешнее давление перемещает струну по плоскости в направлении оси OY . Силовое поле $f(X, Y)$ закрепляет струну в определенных конфигурациях. Конфигурация струны в силовом поле описывается функцией $u(X)$ (см. рисунок 1).

Рис. 1 Часть сетки механически устойчивых конфигураций струны

При $\lambda \gg \max f$ условие минимальности потенциальной энергии приводит к следующему дифференциальному уравнению равновесия струны [15]:

$$\lambda \frac{d^2 u}{dX^2} + h = f(X, Y = u). \quad (1)$$

Данное уравнение должно быть дополнено условием положительности второй вариационной производной функционала потенциальной энергии.

В силу произвольности поля $f(X, Y)$ уравнение (1) является в общем случае нелинейным. Особенность стохастического уравнения (1) состоит в том, что при свободных границах оно даёт множество решений. Решения (1) образуют случайную сетку механически устойчивых конфигураций струны (см. рисунок 1). С увеличением давления h сетка прореживается. Существует некоторое пороговое значение внешнего давления h_c , при превышении которого на площадке скольжения исчезает последняя механически устойчивая конфигурация. Это давление аналогично коэрцитивной силе для доменных стенок в магнетике или критическому скалывающему напряжению для дислокации в кристалле. Кроме того, прослеживается аналогия между h_c и порогом протекания. На аналогию с протеканием на ветвящейся структуре в свое время указывал Лабуш [16] при обсуждении проблемы критического скалывающего напряжения в теории дислокационного скольжения.

Ансамблю одинаковых площадок, отличающихся друг от друга пространственным распределением центров закрепления, можно сопоставить множество случайных значений h_c , имеющее некоторое распределение. Важным свойством величины h_c является тенденция к повышению локализации плотности распределения при увеличении длины струны. Правдоподобно выглядит утверждение, что плотность распределения должна вырождаться в δ -функцию при длине струны, стремящейся к бесконечности. В этом случае h_c становится неслучайной величиной. Эту величину далее будем называть критическим давлением или порогом протекания.

Утверждение о существовании неслучайного предела величины h_c при длине струны, стремящейся к бесконечности не очевидно. Приведем эвристические соображения, согласующиеся с представлением о существовании неслучайного предела h_c .

2. Струна на сетке точечных центров закрепления

Далее рассмотрим силовое поле $f(X, Y)$ специфического вида – точечные центры закрепления, создающие сосредоточенные силы. Параметрами силового поля в этом случае являются: n – поверхностная плотность, f_k – критические силы давления струны на центр закрепления, при которых происходит отрыв от препятствия. При различных центрах вводим распределение $W(f)$ – вероятность того, что критическая сила наугад выбранного центра превышает значение f .

При точечных центрах закрепления механически устойчивые и неустойчивые конфигурации находятся бесконечно близко друг от друга, и нет необходимости использовать условие, наложенное на вторую вариацию потенциальной энергии струны.

Для простоты положим, что все центры закрепления одинаковы и имеют равные критические силы f_0 . Проведем масштабные преобразования уравнения (1). Пусть $X = xL_x$, $Y = yL_y$, где x и y – новые безразмерные координаты. Уравнение (1) в новых переменных примет вид:

$$\lambda \frac{L_y}{L_x^2} \frac{d^2 u}{dx^2} + h = \frac{f_0}{L_x} \tilde{\rho}(x, y = u), \quad (2)$$

параметр f_0 – значение критической силы, поэтому силовое поле $\tilde{\rho}(x, y)$ имеет единичную критическую силу взаимодействия со струной. Потребуем, чтобы в новых координатах на единицу безразмерной площади приходился только один центр закрепления, т.е.

$$L_x L_y n = 1. \quad (3)$$

Потребуем также

$$\frac{f_0}{\lambda} \frac{L_x}{L_y} = 1. \quad (4)$$

Решая уравнения (3) и (4) относительно L_x и L_y , находим масштабные единицы:

$$L_x = \sqrt{\frac{\lambda}{nf_0}}, \quad L_y = \sqrt{\frac{f_0}{n\lambda}}. \quad (5)$$

Уравнение равновесия принимает вид:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \tau = \tilde{\rho}(x, y = u). \quad (6)$$

В уравнении (6) безразмерное давление τ выражается через h так:

$$\tau = h \sqrt{\frac{\lambda}{nf_0^3}}. \quad (7)$$

В физической модели осталось два внешних параметра: безразмерная длина струны $q = L/L_x$ и безразмерное внешнее давление τ . Итак, по площадке с хаотически разбросанными точечными центрами закрепления с единичной поверхностной плотностью и единичной критической силой под действием внешнего давления τ скользит нить длины q , натянутая с единичной силой.

В промежутках между точками закрепления конфигурация нити удовлетворяет уравнению: $\frac{d^2 u}{dx^2} + \tau = 0$, т.е. имеет форму параболы. В точке контакта с центром закрепления конфигурация имеет излом. Угол излома r_k равен безразмерной силе давления струны на центр закрепления. Он определяется расположением ближайших соседей вдоль конфигурации. В рассматриваемом приближении малых углов сила давления струны на центр закрепления r_k выражается через координаты центров (x_k, y_k) следующим образом:

$$r_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} - \frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} + \frac{\tau}{2} (x_{k+1} - x_{k-1}). \quad (8)$$

Если отказаться от приближения $f_0 \ll \lambda$, то конфигурация между точками закрепления будет дугой окружности, см. [16–19].

Струна опирается на центры закрепления. Множество пар $\{x_k, y_k\}$ дает координаты центров. Одновременно, это координаты точек излома конфигурации струны. Таким образом, набор $\{x_k, y_k\}$ задает конфигурацию струны. Вероятность того, что в бесконечно малую область пространства состояний $\{(x_k, x_k + dx_k), (y_k, y_k + dy_k)\}_1^m$

попала какая-либо конфигурация, равна $\prod_{k=1}^{k=m} dx_k dy_k$, где m – число точек излома вдоль конфигурации. Если $W(r)$ – вероятность того, что критическая сила центра закрепления f превышает величину r , то инфинитезимальная вероятность конфигурации попасть в выше указанную область и одновременно быть механически устойчивой равна

$\prod_{k=1}^{k=m} W(r_k) dx_k dy_k$ (для одинаковых центров $W(r)$ – единичная функция). Сумма таких вероятностей по некоторой выделенной области пространства состояний дает среднее число механически устойчивых конфигураций в этой области. В работах [12, 20] проведены вычисления среднего числа S механически устойчивых конфигураций струны безразмерной длины q . Расчет дал:

$$S(\tau q) = \frac{q^{2m-1}}{(2m-1)!} \omega^m(\alpha) e^{-\alpha q \tau}, \quad (9)$$

где $\omega(\alpha) = \int_0^\infty W(r) e^{\alpha r} dr$, подгоночный параметр α является монотонно возрастающей функцией внешнего давления τ и удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{\omega(\alpha)} \int_0^\infty r W(r) e^{\alpha r} dr = \frac{\tau q}{m}. \quad (10)$$

Оценка $S(\tau q)$ при $q \gg 1$ дает

$$S(\tau q) \sim \exp\{q[\sqrt{\omega(\alpha)} - \alpha \tau]\} \quad (11)$$

Зависимости $\alpha(\tau)$ и $\omega(\alpha(\tau))$ таковы, что при некотором значении $\tau = \tau_c$ выражение, стоящее под экспонентой в (9), изменяет знак. Из (11) следует, что при $q \rightarrow \infty$ и $\tau \rightarrow \tau_c$ $S(\tau)$ стремится к нулю. Это означает, что при $\tau > \tau_c$, вероятность обнаружить хотя бы одно механически устойчивое состояние равна нулю. Проведённый анализ указывает на существование неслучайного предела вероятности существования механически устойчивых состояний струны при $q \rightarrow \infty$.

Численные значения порога τ_c равно корню уравнения $\sqrt{\omega(\alpha)} - \alpha \tau = 0$. Расчёты показывают, значения τ_c различны для разных распределений критических сил $W(f)$. Это согласуется с результатами опубликованных ранее работ по моделированию скольжения струны [12,15]. На данный момент наиболее надёжным методом определения значения τ_c является компьютерное моделирование поиска механически устойчивых состояний струны.

3. Поиск механически устойчивой конфигурации струны

Исследуем сетку механически устойчивых конфигураций методом Монте-Карло. В основе алгоритма поиска лежит физическая картина скольжения струны по плоскости. Любая конфигурация представляет собой последовательность дуг парабол, опирающихся на центры закрепления. Часть центров закрепления удерживают струну, а часть не удерживают. Для последних не выполняется условие $r_k < f_0$. Струна отрывается от этих центров. Происходят последовательные отрывы, и струна движется от одной конфигурации к другой. Поиск механически устойчивой конфигурации струны, в компьютерном моделировании, состоит в построении последовательности сменяющих друг друга конфигураций и проверки каждой на механическую устойчивость.

В начале работы компьютерной программы строится начальная конфигурация струны следующим образом. Конфигурации удовлетворяют свободным граничным

условиям: $\left. \frac{du}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=q} = 0$. Поэтому первая дуга конфигурации выходит под прямым

углом на края площадки. Допустим, что процесс построения начинается с некоторой произвольной дуги. Известно, что правым сегментом дуга опирается на центр закрепления (см. рисунок 2). Пусть L_l – затравочное значение длины такой конфигурации, которая опирается на единственный центр закрепления. При равномерном распределении координат центров на площадке скольжения первая координата x_l выразится через затравочную длину L_l так: $x_l = L_l \varepsilon_l$, где ε_l – псевдослучайное число, равномерно распределенное в интервале $(0, 1)$. Потребуем, чтобы вторая дуга, которая начинается из точки x_l , выходила под прямым углом к промежуточному правому краю площадки скольжения. В этом случае угол излома на первом центре закрепления будет равен $r_l = L_l \tau$. Продолжение конфигурации делаем с

таки расчетом, чтобы между продолжением первой дуги и второй дугой не было ни одного центра закрепления. Вторая дуга должна принадлежать первой достижимой конфигурации. Это означает, что площадка между продолжением первой дуги, второй и прямой $x=L_1$ не должна содержать ни одного центра закрепления.

Рис. 2 Начальный участок конфигурации струны. Первая парабола более жирная, L_1 – первая затравочная длина, x_1 и x_2 – координаты центров закрепления

Движение струны представляет собой скачки, сменяющие конфигурации. При движении во время скачка струна замечает площадь

$$a = \int (u_2(x) - u_1(x)) dx, \quad (12)$$

где $u_1(x)$ и $u_2(x)$ – начальная и конечная конфигурации. Вероятность того, что на площадке a_1 нет ни одного центра закрепления, равна $\exp(-a_1)$. Площадь a , распределенная по экспоненциальному закону, разыгрывается с помощью генератора псевдослучайных чисел: $a_1 = -\ln \varepsilon_2$, где ε_2 – равномерно распределенное псевдослучайное число. Расчет (12) дает:

$$a_1 = r_l (L_1 - x_1)^2 / 2 = r_l L_l^2 (1 - \varepsilon_1)^2 / 2 \quad (13)$$

Следовательно, для первой промежуточной длины конфигурации струны будем иметь:

$$L_l = \sqrt[3]{\frac{-2 \ln \varepsilon_2}{r_l (1 - \varepsilon_1)}}. \quad (14)$$

Положения последующих центров закрепления определяются в цикле, тело которого точно такое же, как для второго центра закрепления. На следующем шаге алгоритма проводится проверка центров закрепления на механическую устойчивость. Проверка всегда проводится, начиная с одного и того же конца струны. При обнаружении механически неустойчивого участка ($r_k > f_k$, “горячее звено”) проводится срыв с неустойчивого центра закрепления и построение новой конфигурации. Начинается построение такой новой конфигурации, в которую нельзя попасть, минуя начальную. Рисунок 3 поясняет алгоритм, составляющий тело цикла.

Рис. 3. Отрыв от центра с номером k . Новая замечённая площадка залита. Псевдоцентр помечен крестиком.

Определим параметр сетки конфигураций, который ведет себя критическим образом. При скольжении нить замечает полную площадь $A = \sum a_k$. Чем ближе τ к порогу протекания τ_c , тем больше замечаемая площадь. Очевидно, при $\tau \rightarrow \tau_c$ должно выполняться $A \rightarrow \infty$. Если скольжение струны принадлежит к классу задач теории протекания, то зависимость $A(\tau)$ должна иметь критическое поведение (степенная зависимость). Задача моделирования состоит в том, чтобы установить, действительно ли рост $A(\tau)$ происходит по степенному закону.

Пусть номер первого неустойчивого центра закрепления равен k . Срыв происходит путем продвижения дуги конфигурации при неподвижной точке закрепления с номером $k-1$ в направлении скольжения. Замеченная дугой площадь не должна содержать центров закрепления. Вероятность того, что замеченная дугой площадь до столкновения с центром закрепления превышает значение a , равна

$$P(a) = e^{-a}, \quad (15)$$

Предельное значение a определяется так:

$$a_{\max} = \frac{l}{2} r_k (x_{k+1} - x_k)(x_k - x_{k-1}). \quad (16)$$

При таком значении замеченной площади струна провиснет на центрах закрепления с номерами $k-1$ и $k+1$. Разыгранная случайная площадь a не может превышать $a_{\max}$. Замена a на $a_{\max}$ при разыгранной $a > a_{\max}$ ошибочна. Чтобы избежать данной ошибки, розыгрыш случайной площадки проводился путем последовательного суммирования площадей малых серповидных областей с площадями $\Delta a \ll 1$ и сравнения их суммы с равномерно распределенным псевдослучайным числом ε . Если площадка оказалась больше, чем выброшенное ε , то считалось, что дуга наткнулась на центр закрепления, в противном случае процесс выбрасывания малых площадок продолжался до тех пор, пока накопленная площадь не достигала $a_{\max}$. Если произошла встреча с центром закрепления, то на образовавшейся дуге разыгрывалась x -координата центра. Точка пересечения старой конфигурации с новой дугой рассматривался как новый узел конфигурации, который опирается на центр закрепления с нулевой критической силой (псевдоцентр). Срыв с псевдоцентра проводится по тому же алгоритму. Процедура повторяется до тех пор, пока новая дуга не упрется в центр закрепления с номером $k+1$. На новой конфигурации силы давления струны на центры с номерами $k-1$ и $k+1$ увеличиваются, зато силы давления на новые центры, расположенные между ними, в сумме оказываются меньше r_k . Выполняется условие: сумма сил давления на центры вдоль любой конфигурации, участвующие в перестройке, остается неизменной. Следующая проверка на механическую устойчивость начинается с центра под номером $k-1$.

Обсудим связь задачи о равновесных конфигурациях струны с теорией протекания. В классической постановке задач теории протекания имеется некоторое

случайное многообразие, на котором по определенному правилу устанавливается связность (см., например, [21]). Условия существования связности могут изменяться при изменении либо внешних параметров, либо параметров, характеризующих случайное многообразие. При непрерывном изменении этих параметров, по достижении некоторого значения, связность исчезает. В отыскании этих значений (порога протекания) состоит одна из центральных задач теории протекания. В задаче о механически устойчивых состояниях струны имеются все атрибуты классической теории протекания. Случайным многообразием является случайное силовое поле центров закрепления. Механически устойчивые состояния создают связность на этом поле. Дифференциальные уравнения равновесия служат правилом установления связности. Критическое поле является аналогом порога протекания.

На рисунке 4 приведены результаты одной из серий машинных экспериментов при $q=100$. Получена зависимость суммарной заметённой площади A от внешнего давления τ . Точками изображены данные машинного эксперимента, а сплошная линия изображает критическую зависимость вида

$$A(\tau) = \frac{C}{(\tau_c - \tau)^\nu}, \quad (17)$$

построенную по методу наименьших квадратов в логарифмическом масштабе. Для данной серии параметры критической зависимости оказались: $\ln C = -20,2$; $\nu = 12,8$; $\tau_c = 0,82$. Значение $q=100$ соответствует сравнительно коротким конфигурациям. Критическое давления при этом оказывается сравнительно большим. С ростом длины конфигурации параметры критической зависимости уменьшаются. Моделирование при $q=1000$ дало такие значения параметров критической зависимости $\ln C = -17,7$; $\nu = 6,48$; $\tau_c = 0,69$. Моделирование показало, что при любых длинах конфигурации и любых распределениях $w(f)$ результаты машинного эксперимента укладываются в схему критического поведения зависимости заметаемой нитью площади от внешнего давления.

Рис. 4. Зависимость заметённой площади от внешнего давления в логарифмическом масштабе при $q=100$ (малая длина).

Как выше отмечалось, параметры C , ν и τ_c зависят от длины конфигурации. Каноническая форма зависимости порога протекания от длины конфигурации имеет критический вид [21]:

$$\tau_c(q) = \tau_c(\infty) + \frac{S}{q^\lambda}. \quad (18)$$

Истинным порогом протекания считается значение τ_c при длине струны стремящейся к бесконечности. На рисунке 5 приведен подобранный график зависимости логарифма разности $\ln(\tau_c(q) - \tau_c(\infty))$ от $\ln(q)$. График построен по шести точкам: $q=25$, $q=50$, $q=100$, $q=200$, $q=500$, $q=1000$. Грубая оценка дает значение порога протекания – $\tau_c(\infty) \approx 0,685$. Это близко к значениям, полученным при моделировании скольжения дислокаций [10-13, 16-19] и доменных стенок в ферромагнетиках [2-5].

Рис. 5. Зависимость превышения критического давления над порогом протекания от длины конфигурации в логарифмическом масштабе.

4. Протекание на ориентированной решетке

Для установления аналогии задачи о критическом давлении на струну, находящуюся в потенциальном поле точечных центров закрепления, и задачи о пороге протекания проведем исследование протекания на ориентированной квадратной решетке (см. [21] и рис. 6). Рассмотрим задачу связей.

Рис. 6. Графический образ поиска траектории протекания. Залечивание левого звена.

Каждая связь в решетке имеет два признака (a , b): признак a – указывает ориентацию связи (правая или левая), признак b указывает целой или разорванной является связь. Например, обозначение $(-1, -1)$ говорит, что связь является левой и разорванной, а обозначение $(1, 1)$ говорит, что связь является правой и целой. Указание положения начального узла и всей последовательности пар (a_k, b_k) полностью задаст траекторию.

Использован алгоритм поиска протекательной траектории, приближенный к алгоритму поиска механически устойчивой конфигурации струны. Поиск, с одновременным построением, начинается от края решетки параллельного направлению протекания. На каждом шаге обрабатывается только одна траектория. Исходная

траектория состоит из смеси разорванных и целых связей. Проверка выявляет первую от начального узла разорванную связь (“горячее звено”). Например, оказалось, что горячее звено является левой связью, начинающийся с узла O (см. рисунок 6). По определению ни одна связь участка OO' траектории не может принадлежать протекательной траектории. Переход к следующей траектории состоит из двух шагов. На первом шаге уничтожается последовательность связей, соединяющих точку O и O' (на рисунке это последовательность $\{(-1, -1), (-1, 1), (-1, 1), (1, -1)\}$), так как эти связи не могут принадлежать протекательной траектории. На втором шаге точки O и O' соединяются последовательностью с новыми связями (процедура залечивания). Все новые связи переигрываются. И каждая связь новой последовательности подвергается испытанию на целостность: $\{(1, 1), (-1, 1), (-1, -1), (-1, 1)\}$. Длина скачка ℓ равна разности координат текущего и предыдущего горячего звена. Если горячее звено оказалось правой связью, то переход к новой траектории проводится отбрасыванием последовательности правых связей вплоть до первой левой. Отметим, что в каждом акте “залечивания” между “залечиваемой” и новой конфигурациями нет ни одной траектории протекания.

В описанном алгоритме поиск протекательной траектории происходит так, как будто движется цепочка связей, заматавая некоторую площадь, подобно струне. Понятно, при стремлении вероятности связи быть целой к порогу протекания, заматываемая площадь, должна стремиться к бесконечности. Параметр с критическим поведением тот же самый, что и для скользящей струны. На рисунке 7 приведены результаты одной из серий эксперимента при длине траектории, равной 100. Точками изображены данные машинного эксперимента $A(x-x_c)$, а сплошная линия изображает критическую зависимость вида

$$A(\tau) = \frac{C}{(x-x_c)^v}, \quad (19)$$

построенную по методу наименьших квадратов в логарифмическом масштабе. Рисунок показывает, что зависимость заматываемой площади от вероятности связи быть целой согласуется с предположением о критическом характере этой зависимости [21]. Для данной серии оказалось $\ln C = -16.2$; $v = 17.7$; $x_c = 0.353$.

Рис. 7. Зависимость заматываемой траекторией площади A от вероятности x произвольной связи быть целой.

При длине траектории, равной 1600 значения параметров критической зависимости получились следующими: $\ln C = -17.0$; $v = 9.16$; $x_c = 0.602$.

Зависимость порога протекания от длины конфигурации, так же как и в ситуации с механически устойчивыми конфигурациями, подчиняется критическому закону, т.е.

$$x_c(q) = x_c(\infty) + \frac{S}{q^\lambda}. \quad (20)$$

График зависимости логарифма разности $\ln(x_c(q) - x_c(\infty))$ от $\ln(q)$ приведен на рисунке 8. Он построен по пяти точкам: $L=100$, $L=200$, $L=400$, $L=800$ и $L=1600$. Оценка дает значение порога протекания $x_c(\infty) \approx 0.635$.

Качественные отличия вероятностных характеристик обсуждаемых здесь двух задач наблюдаются в деталях процесса поиска. Было проведено исследование вероятностных распределений длин скачков горячего звена, совершаемых в процессе поиска механически устойчивых состояний струны и поиска траекторий протекания. Под длиной скачка понимается разность x -координат последовательных срывов с центров закрепления в задаче о скольжении струны, и разность номеров связи, являющейся горячим звеном при залечивании.

Рис. 8

Зависимость превышения критической вероятности над порогом протекания от длины.

При поиске механически устойчивого состояния струны распределение скачков горячего звена $n(\ell)$ по длинам ℓ имеет отличия от аналогичного распределения в решеточной задаче. Во-первых, распределение имеет два максимума разной высоты. Во-вторых, в точке $\ell = 0$ наблюдается излом (рис. 8). И, наконец, при любых значениях внешнего давления распределение длин скачков асимметрично.

Рис. 9

Распределение длин скачков горячего звена при скольжении струны. На сноске показана область излома.

В критической области значений внешнего давления распределения длин скачков качественно не изменяются с изменением внешнего давления. Распределение длин скачков горячего звена ℓ при поиске траектории протекания на решётке имеет более простой вид, чем при поиске механически устойчивых конфигураций струны. Вблизи порога протекания, это экспонента:

$$p(\ell) = p(0)e^{-\frac{|\ell|}{\ell_0}}. \quad (21)$$

Казалось бы, этот результат не является неожиданным. При продвижении вдоль траектории должно проводиться испытание связей на целостность. Вероятность того, что отрезок траектории длиной $\ell = n$ не будет содержать n разорванных связей, равна $x^n = e^{-n \ln \frac{1}{x}}$, т.е. является показательной функцией. Однако следует иметь в виду, что определенный вклад в множество значений длин скачков дают ситуации, когда горячее звено оказывается вне залечиваемой области (в середине заплатки). Последовательность звеньев, из которой состоит длина скачка, может включать в себя не только проверенные связи в одном акте залечивания, но и связи, принадлежащие ранее построенному участку траектории, которые в акте перестройки траектории не подвергаются проверке. Это обстоятельство приводит к тому, что при разных значениях вероятности связи быть целой x характерная длина не равна $-\frac{1}{\ln x}$. Вдали от порога протекания характерные длины скачков вперед и назад различны. Действительно, как показывает машинный эксперимент, вдали от порога протекания распределение остается экспоненциальным, но несимметричным. Для отрицательных значений скачков характерная длина оказывается меньшей. Например, при $x=0,7$ характерная длина для отрицательных скачков почти в два раза меньше чем для положительных.

5. Заключение

Показано, что задача о механически устойчивых состояниях струны, закрепляемой сеткой точечных препятствий, принадлежит к классу задач теории протекания с управляющим параметром – внешним давлением. Установлена некоторая аналогия между задачей о критическом давлении на струну и задачей о пороге протекания на ориентированной квадратной решетке. Предложен алгоритм исследования траекторий протекания на ориентированной квадратной решетке, аналогичный методу исследования механически устойчивых конфигураций в критической области. Найдены пороги протекания и оценены критические индексы для обеих задач. Вместе с тем, задача о скольжении струны и решёточная задача имеют различия, не позволяющие считать их полностью подобными. В частности, качественно различно выглядят функции распределения скачков координат центров закрепления струны и скачков горячих узлов в решеточной задаче.

Можно ожидать, что критическое поведение, обнаруженное в задаче о критическом давлении на струну, может иметь целый ряд физических объектов, родственных струне на сетке центров закрепления. Это может быть струна на сетке центров закрепления с конечным радиусом взаимодействия, мембрана в закрепляющем потенциальном поле, трехмерное распределение намагниченности структурно неоднородного магнетика во вращающемся магнитном поле и т.п. Все эти задачи достойны изучения.

1. Боровик А.Е., Кулешов В.С., Стржемячный М.А. Эффективные уравнения движения доменных стенок в ферромагнетике//ЖЭТФ. 1975. 68. Вып. 6. С. 2236–2248.
2. Hilzinger H.R., Kronmuller H. Statistical Theory of the Pinning of Bloch walls by ran-domly distributed Defects//J. Magn. Mater., 1976. 2. № 1 P. 11-17.

3. Hilzinger H.R. Scaling Relation in Magnetic, Mechanical and Superconducting Pinning Theory //Phil. Mag., 1977. 36. № 1 P. 225-234.
 4. Дьячук П.П., Иванов А.А., Лобов И.В. Движение изгибающейся доменной границы в непрерывном потенциальном поле дефектов//Изв. АН СССР. Сер. Физ.. 1981. 45. № 9. С. 1701–1703.
 5. Иванов А.А., Иванова Е.Е. Влияние распределения центров закрепления доменной стенки и дислокации по сортам на статистику сил взаимодействия //ФММ. 1986. 62. №. 6. С. 1077-1081.
 6. Струков Б.А., Леванюк А.П. Физические основы сегнетоэлектрических явлений в кристаллах. М. Наука; Физматлит 1995. 301 с.
 7. Mott N.F., Nabarro F.R.N. Report on Strength of solids. London: Physical Society, 1948. 1. P. 119.
 8. Friedel J. Les dislocations. Paris: Ganthier – Villars, 1956. Перевод кн. Фридель Дж. Дислокации. М. Мир., 1967. 644 с.
 9. Appel F., Messerschmidt U., Nadgornyi E.M., Zaitsev S.I. The interaction between Dis-location and Point Obstacles: A comparison of the interaction Parameter Distributions, Voltage Electron Microscopy Experiments//Materials Science and Engineering, 1981. 52. № 1. P. 69–71.
 10. Hanson K., Morris J.W. (Jr.). Computer simulation of interacting dislocation motion resisted by point-like barriers//J. Appl. Phys., 1978. 49. № 6 P. 3266–3271.
 11. Выдашенко В.Н., Ландау А.И. Упрочнение кристалла термически непреодолимыми для дислокаций локальными дефектами//ФТТ. 1981. 23. №2. 6. С. 565–573.
 12. Иванов А.А. Свойства предельно прочных и виртуальных конфигураций дислокации на сетке препятствий со случайными силами срывов//ФММ. 1984. 57. №. 1. С. 156-168.
 13. Labush R. Calculation of the critical field gradient in type 2 superconductors//Crystal lattice Defects, 1969. 1. № 1. p. 1–16.
 14. Власов С.В., Марков А.В. Ориентированные полимерные пленки// Полимерные материалы. – 2003, № 6. – С. 12-14.
 15. Иванов А.А., Дьячук П.П. Описание одномерного потока конфигураций доменной границы, движущейся в случайном поле точечных дефектов//ФММ. 1980. 42. № 2. С. 231-240.
 16. Labush R. Statistical theory of dislocation in a random array of point obstacles//J. Appl. Phys., 1977. 48. P. 4550–4556.
 17. Выдашенко В.Н., Ландау А.И. Моделирование на ЭВМ процесса последовательного преодоления дислокацией соседних точечных препятствий в условиях низких температур//Физ. Низких температур. 1979. 5. №5. 6. С. 512–517.
 18. Hanson K., Altintas S. Morris J.W. (Jr.). Computer simulation of dislocation glide through field of point obstacles//Nuclear Metallurgy, 1976. 20. P. 917–928.
 19. Зайцев С.И. Моделирование движения дислокации через точечные препятствия//Дефекты в кристаллах и их моделирование на ЭВМ. Л. Наука, 1980. С 178–191.
 20. Лобов И.В. Метод вычисления критического напряжения прорыва дислокации через сетку случайно расположенных неодинаковых точечных препятствий.//ФММ, 1986, 61, №4, 817–819.
 21. Эфрос А.Л. Физика и геометрия беспорядка. М. Наука, 1982. 376 с.
-