РАЗДЕЛ VII. МАШИНОСТРОЕНИЕ

Гулгазли А.С., Мирзеев Е.В.

Обобщение теоремы Мориса-Леви на квазиплоской деформации

*Азербайджанский Государственный Университет Нефти и Промышленности
(Азербайджан, Баку)*

doi: 10.18411/sr-10-04-2021-27

Аннотация

В последние годы в место вертикальных нефтяных и газовых скважин бурят и горизонтальные скважины. Нижняя горизонтальная часть скважины длиной 100-150 метров находится в продуктивном пласте. Если учесть, что для вертикальных скважин толщина продуктивного пласта всего 10-15 метров, то продуктивность скважины увеличивается в 10 раз. На большой глубине внутреннее и внешнее давления горизонтальной скважины намного больше чем его собственный вес, но длину этой части нельзя считать бесконечной. Для решения подобного рода задач прочности в этой работе обобщена теорема Мориса-Леви призматических тел с конечной длиной.

Ключевые слова: Теорема, перемещение, деформация, напряжение, закон Гука, призматическое тело, граничные условия, уравнения равновесия.

Abstract

In recent years, horizontal wells have also been drilled in place of vertical oil and gas wells. The lower horizontal part of the well, 100-150 meters long, is located in the production layer. Considering that for vertical wells the thickness of the production layer is only 10-15 meters, then the productivity of the well increases 10 times. At great depths, the internal and external pressures of a horizontal well are much greater than its own weight, but the length of this part cannot be considered infinite. To solve this kind of strength problems, this work generalizes the Maurice-Levy theorem for prismatic bodies with a finite length.

Keywords: Theorem, displacement, deformation, stress, Hooke's law, prismatic body, boundary conditions, equilibrium equations.

Теорема Мориса-Леви доказывает, что, когда объемные силы не учитываются, а линейные деформации бесконечно малы, то при плоской деформации, напряжения не зависят от механических свойств материала, а определяются формой поперечного сечения и контурными условиями [4].

В случае плоской деформации выполняется условие [4].

$$u_1 = u_1(x_1, x_2); \quad u_2 = u_2(x_1, x_2); \quad u_3 = 0$$

где u_1, u_2 – компоненты вектора смещения в поперечной плоскости призмы, u_3 – перемещение в направлении оси призмы. Случай плоской деформации реализуется в основном для бесконечно длинных призматических тел. Система координат выбрана так, что оси x_1, x_2 находятся в поперечных сечениях, а ось x_3 направлена по оси призматического тела. На практике часто встречаются конструктивные элементы призматической формы с конечной длиной [1,2,3]. Эти элементы конструкции находятся под воздействием внешних сил, во много раз превышающих их собственный вес. Поэтому при изучении напряженно-деформированного состояния этих элементов, действующая на них сила тяжести не учитывается [5]. Предположим, что форма поперечного сечения и боковые силы, действующие на призматический элемент конструкции, не зависят от переменной x_3 , а так же по торцам приложены силы, направленные вдоль оси призмы. Тогда продольная относительная деформация

получает постоянное значение, а это означает, что продольное перемещение является линейной функцией от x_3 и компоненты вектора смещения будут иметь следующий вид:

$$u_1 = u_1(x_1, x_2); \quad u_2 = u_2(x_1, x_2); \quad u_3 = ax_3 + b \quad (1)$$

где a и b - постоянные величины. Назовем такое состояние деформации *квазиплоским формационным состоянием*.

Докажем, что напряженное состояние при квазиплоской деформации не зависит от механических характеристик материала, и определяется внешними силами и формой поперечного сечения. С учетом (1) в плоскостях, перпендикулярных оси x_3 компоненты тензора малых относительных деформаций следующие [4]:

$$\begin{cases} e_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}; & e_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}; & e_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \\ e_{13} = e_{23} = 0; & e_{33} = a \end{cases} \quad (2)$$

Известно, что в общем случае закон Гука имеет вид;

$$\begin{cases} e_{11} = \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})] \\ e_{22} = \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})] \\ e_{33} = \frac{1}{E} [\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})] \\ e_{12} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12} \\ e_{13} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{13} \\ e_{23} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{23} \end{cases}$$

Для квазиплоской деформации эта система получает вид;

$$\begin{cases} e_{11} = \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})] \\ e_{22} = \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})] \\ e_{33} = \frac{1}{E} [\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})] = a \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} e_{12} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12} \\ e_{13} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{13} = 0 \\ e_{23} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{23} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Из третьего уравнения этой системы σ_{33} выразим через σ_{11} и σ_{22} . Тогда

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + Ea$$

Подставляя это выражение в (3) и (4) имеем;

$$\begin{cases} e_{11} = \frac{1+\nu}{E} [\sigma_{11} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})] + a \\ e_{22} = \frac{1+\nu}{E} [\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})] + a \\ e_{12} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12} \end{cases} \quad (5)$$

От системы уравнений совместности деформации остается только одно уравнение [4];

$$\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (6)$$

Из последних двух уравнений системы (4) $\sigma_{13} = 0$ и $\sigma_{23} = 0$. Тогда система уравнений равновесия без учета объемных сил имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0; \Rightarrow \sigma_{33} = \sigma_{33}(x_1, x_2) \end{cases} \quad (7)$$

Дифференцируя первое уравнение по x_1 , а второе по x_2 и слагая их получаем;

$$\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} = -2 \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (8)$$

Подставляя (5) в (6) имеем;

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} [\sigma_{11} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})] + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} [\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})] = 2 \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}$$

Последнее уравнение перепишем следующим образом;

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} [(\sigma_{11} + \sigma_{22}) - \sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})] + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} [(\sigma_{22} + \sigma_{11}) - \sigma_{11} \\ - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})] = 2 \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \end{aligned}$$

или

$$(1 - \nu) \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} (\sigma_{22} + \sigma_{11}) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} (\sigma_{22} + \sigma_{11}) \right] - \left(\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} \right) = 2 \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (9)$$

Подставляя (8) в (9) имеем;

$$\Delta(\sigma_{22} + \sigma_{11}) = 0 \quad (10)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

двумерный оператор Лапласа.

Уравнение (10) является уравнением Леви. Таким образом уравнение Леви верно не только плоской деформации, но и для квазиплоской деформации.

Далее введя функцию напряжений Эри подобно плоской деформации получаем уравнение [4]

$$\Delta \Delta \phi = 0 \quad (11)$$

где $\phi(x_1, x_2)$ – функция напряжений Эри. Напряжения как известно выражаются через функцию напряжений Эри следующим образом [4];

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2}; \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2}; \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} \quad (12)$$

Для первой основной граничной задачи контурные условия записываются в виде [4]:

$$\begin{cases} \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 = T_{n_1} \\ \sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2 = T_{n_2} \end{cases} \quad (13)$$

где n_1, n_2 косинусы углов между нормалью n к контуру поперечного сечения призматического тела и осями координат x_1, x_2 соответственно, T_{n_1}, T_{n_2} – проекции вектора силы в произвольной точке контура.

Таким образом, уравнения равновесия (7), уравнение Леви (10), уравнение определяющее функцию напряжений Эри. (11), выражения определяющие компоненты напряжения через функцию напряжений Эри (12), а также контурные условия (13) при отсутствии массовых сил не содержат упругие постоянные. Следовательно доказана следующая теорема

Теорема: В квазиплоской деформации при отсутствии массовых сил напряженное состояние упругого призматического тела в любом его сечении,

перпендикулярном оси x_3 не зависит от механических свойств материала и определяется заданными на контуре этого сечения силами и его формой.

1. Абдурахманов М.Т., Кагарманов Н.Ф. «Проектирование профилей горизонтальных скважин» / Сб. научных трудов. / БашНИПИнефть, 1991. Вып. 84. с. 56- 61
 2. Алиев З.С., Бондаренко В.В. Исследования горизонтальных скважин. М.: Нефть и газ – РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, 2004 г. 300 с.
 3. Алимжанов М.Т., Байзаков М.К., Смагулов Б.А. Исследование механических процессов вокруг глубоких скважин. «Нефтяное хозяйство», 1996. -№ 10.-С. 21-24.
 4. Амензаде Ю.А. «Теория упругости» М. «Высшая школа» 1971, с.247
 5. Васильев Ю.Н., Дубина Н.И. "Модель напряженного состояния призабойной зоны" . «Нефть и газ», 2000, № 4, С. 44 -7.
-