РАЗДЕЛ XV. ФИЗИКА

Аксёнов В.В.

Пятнадцать теорем математической геофизики. Формулировки, доказательства, ссылки на публикации

*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО
РАН
(Россия, Новосибирск)*

doi: 10.18411/sr-10-04-2020-28

idsp: sciencerrussia-10-04-2020-28

Аннотация

В статье сформулированы и доказаны пятнадцать основных для геофизической электродинамики теорем. Эти теоремы позволяют обоснованно интерпретировать наблюдаемые данные, полученные в результате проведения двух международных геофизических годов и всемирной магнитной съемки. Они учитывают возникающие в природе гидромагнитные эффекты, зафиксированные экспериментально более ста лет назад. Теоремы вскрывают как математическую сущность геофизической электродинамики, так и имеющие место в природе новые физические явления, а именно несиловые и силовые электромагнитные поля, подтвержденные экспериментом в международных геофизических годы.

Ключевые слова: тороидальные и полоидальные электромагнитные поля, теоремы существования этих полей, математическое обоснование разделения суммарных вихревых магнитных полей на тороидальную и полоидальную части.

Abstract

The article formulated and proved fifteen basic theorems for geophysical electrodynamics. These theorems allow a reasonable interpretation of the observed data obtained as a result of two international geophysical years and the world magnetic survey. The theorems take into account the hydromagnetic effects that occur in nature, recorded experimentally more than a hundred years ago.

The theorems reveal both the mathematical essence of geophysical electrodynamics and the appearance of new physical phenomena in its theory, namely non-force and force electromagnetic fields, confirmed by experiment in international geophysical years.

Keywords: toroidal and poloidal electromagnetic fields, theorems of the existence of these fields in a natural electromagnetic field, mathematical justification of the separation of vortex magnetic fields into toroidal and poloidal parts.

Введение

Кардинальным изменением в математической геофизике (геофизической электродинамике) является замена:

а) *статической парадигмы* К.Ф. Гаусса в геомагнетизме:

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{H} = -\nabla V, \quad \Delta V = 0, \quad (1)$$

где $\mathbf{H}$ – напряженность магнитного поля, V – скалярный потенциал, $\mathbf{H}, V \in C^\infty$,

б) на *стационарную*:

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \Delta \mathbf{A} = \mathbf{j}, \quad \mathbf{A} = (\mathbf{Qr}) + \nabla \times (\mathbf{Qr}), \quad (2)$$

где $\mathbf{A}$ – векторный потенциал, $\mathbf{j}$ – плотность электрического тока, $\mathbf{H}, \mathbf{A}, \mathbf{j} \in C^\infty$,

в) или *квазистационарную* для переменной части земного магнитного поля:

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \Delta \mathbf{A} + \chi^2 \mathbf{A} = \mathbf{j}, \quad \mathbf{A} = (\mathbf{Qr}) + \nabla \times (\mathbf{Qr}), \quad (3)$$

где χ – электромагнитная константа.

Эта замена вызвала разработку и доказательство целого ряда фундаментальных теорем, пятнадцать из которых здесь сформулированы автором, приведены их полные доказательства.

Теоремы

Первая теорема общего характера касается восстановления векторного поля специального вида по данным о нормальной компоненте этого поля на регулярной границе.

Теорема 1.

Соленоидальное векторное поле $\mathbf{H}$ в сферической области V (в шаре с поверхностью S и радиусом R) однозначно восстанавливается выражением:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 = \nabla \times (\mathbf{Qr}) + \nabla \times \nabla \times (\mathbf{Qr}), \quad (4)$$

если известна нормальная составляющая $H_N(\mathbf{r})$ на S , а функция $Q(r, \theta, \varphi) \in C^\infty$,

среднее которой $\langle Q \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi Q \sin \theta d\theta d\varphi = 0$ на S , а также $\mathbf{H}, \mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2 \neq 0$ и $\nabla \times \mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2$

всюду.

Доказательство.

Если векторное поле $\mathbf{H}$ отвечает (4), то, чтобы доказать единственность разложения (4), необходимо выразить функцию Q через исходную нормальную компоненту векторного поля $\mathbf{H}_2$ или $\nabla \times \mathbf{H}_1$.

$$\begin{aligned} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{H}_2) &= \mathbf{r} \cdot \nabla \times \nabla \times (\mathbf{Qr}) = \mathbf{r} \{ \nabla \nabla \cdot (\mathbf{Qr}) - \nabla^2 (\mathbf{Qr}) \} = \mathbf{r} \{ \nabla [\mathbf{r} \cdot \nabla Q + 3Q] - 2\nabla Q - \mathbf{r} \nabla^2 Q \} = \\ &= -r^2 \nabla^2 Q + \mathbf{r} \cdot \nabla (\mathbf{r} \cdot \nabla Q) + \mathbf{r} \cdot \nabla Q = -r^2 \nabla^2 Q + \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial Q}{\partial r}) = -DQ, \\ (\mathbf{r} \cdot \nabla \times \mathbf{H}_1) &= \mathbf{r} \cdot \nabla \times \nabla \times (\mathbf{Qr}) = -DQ. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь D – прямой оператор (оператор Бельтрами) определяется из (5), а именно:

$$D = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad (6)$$

и является частью оператора Лапласа без радиальных производных.

Чтобы найти Q , необходимо определить прямой D и обратный D^{-1} операторы. Обратный оператор D^{-1} определяется следующим образом. Пусть $\psi(r, \theta, \varphi)$ и $f(r, \theta, \varphi)$ – произвольные скалярные функции, связанные соотношением:

$$D\psi(r, \theta, \varphi) = f(r, \theta, \varphi). \quad (7)$$

При этом функции $\psi(r, \theta, \varphi)$ и $f(r, \theta, \varphi) \in C^\infty$, среднее у которых на S равно нулю $\langle \psi \rangle = 0$, $\langle f \rangle = 0$. Обозначим:

$$S_n(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^n A_n^m P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad (8)$$

где $P_n^m(\cos \theta)$ – сферические функции, A_n^m – комплексные постоянные $S_n^m(\theta, \varphi) \in C^\infty$. Далее представим вспомогательные функции ψ, f их стандартными разложениями по сферическим функциям:

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(r) S_n(\theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \psi_n(r) A_n^m P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi}; \quad f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(r) \bar{S}_n^m(\theta, \varphi). \quad (9)$$

Суммирование по n начинается с единицы, свободный член отсутствует в связи наложенным условием нулевых средних для функций Q, ψ, f на сфере S . При этом функции $\psi_n(r)$ и $f_n(r)$ для $r \leq R$ пропорциональны r^n , а для $r \geq R$ соответственно $\frac{1}{r^{n+1}}$.

Применим прямой оператор D к функции $S_n(\theta, \varphi)$, воспользовавшись результатом (5):

$$DS_n(\theta, \varphi) = -n(n+1)S_n(\theta, \varphi). \quad (10)$$

Действительно, с учетом (5) и условий на функции $\psi_n(r)$ и $f_n(r)$, можно записать:

$$\begin{aligned} -r^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} r^n S_n(\theta, \varphi) + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} r^n S_n(\theta, \varphi) \right) &= Dr^n S_n(\theta, \varphi); & \text{отсюда} \\ -n(n+1)S_n(\theta, \varphi) &= DS_n(\theta, \varphi), \\ -r^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} \frac{1}{r^{n+1}} S_n(\theta, \varphi) + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r^{n+1}} S_n(\theta, \varphi) \right) &= D \frac{1}{r^{n+1}} S_n(\theta, \varphi); \\ -n(n+1)S_n(\theta, \varphi) &= DS_n(\theta, \varphi), \end{aligned}$$

Такая запись представляется наиболее удобной, так как в операторе D функции дифференцируются только по угловым координатам, согласно (5). Теперь применим к (7) оператор D и с учетом ранее полученных разложений функций ψ и f получим:

$$D\psi = -\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(r) n(n+1) S_n(\theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(r) \bar{S}_n(\theta, \varphi). \quad (11)$$

Функции $S_n(\theta, \varphi)$ и $\bar{S}_n(\theta, \varphi)$ отличаются только комплексными коэффициентами. Приравняем общие члены в (11), помня об абсолютной и равномерной сходимости рядов разложений функций ψ, f по сферическим функциям. Разделим правую и левую части на множитель $n(n+1)$. В результате получим:

$$\psi_n(r) S_n(\theta, \varphi) = -f_n(r) \frac{\bar{S}_n(\theta, \varphi)}{n(n+1)}. \quad (12)$$

Просуммировав все гармоники в (12), будем иметь:

$$\psi = -D^{-1} f = -\sum_{n=1}^{\infty} f_n(r) \frac{S_n(\theta, \varphi)}{n(n+1)}. \quad (13)$$

Формула (13) есть определение обратного оператора D^{-1} . Обратный оператор в (13), с нашей точки зрения, является более конструктивным для данной задачи, чем разработанный ранее интегральный обратный оператор для оператора Бельтрами, содержащий функцию Грина. Применим обратный оператор:

$$Q = -\sum_{n=1}^{\infty} r H_{Pm}(r) \frac{\tilde{S}_n(\theta, \varphi)}{n(n+1)} = -\sum_{n=1}^{\infty} r (\nabla \times H_T)_m(r) \frac{S'_n(\theta, \varphi)}{n(n+1)}. \quad (14)$$

Если учесть, что при $r = R$ имеем $H_{Pm}(R) = H_{Nm}(R)$,

$$H_N(r) = \sum_{n=1}^{\infty} H_{Nm}(R) S'_n(\theta, \varphi),$$

$$\nabla \times H_T = \nabla \times \nabla \times (Qr) = H_P, \text{ то}$$

$$Q = -\sum_{n=1}^{\infty} R H_{Nm}(R) \frac{\tilde{S}_n(\theta, \varphi)}{n(n+1)}, \quad (15)$$

где R – радиус шара.

Равенство (15) позволяет вычислить неизвестные комплексные постоянные только по информации, содержащейся на сфере S , что точно соответствует теореме Гельмгольца и теореме единственности представления соленоидального векторного поля $\mathbf{H}$ разложением (4).

Теорема доказана.

Вторая теорема посвящена пределам применимости уравнений Максвелла на Земле в связи с обнаружением в непроводящей атмосфере Земли непотенциальных магнитных полей: эффекты Van Vleuten, Н.П. Беньковой, Д.Н. Четаева. Эффект Дж. Лармора так же как и названные эффекты потребовал определиться с пределами применимости стандартных уравнений Максвелла не только на Земле, но и в космосе [2].

Теорема 2.

Пределы применимости стандартных уравнений Максвелла ограничиваются технической физикой и любыми экспериментами с магнитными полями на Земле в связи с малыми значениями критерия подобия – магнитного числа Рейнольдса $Re_m = L\mu\sigma|V|$.

Доказательство.

Известно, что эффект Дж. Лармора вызывает дополнительное электрическое поле:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + [\mathbf{V} \times \mathbf{B}], \quad (16)$$

где $\mathbf{E}'$ – дополнительное электрическое поле по сравнению со стандартной напряженностью $\mathbf{E}$, $\mathbf{V}$ – скорость заряженной жидкости или скорость одной системы отсчета относительно другой, $\mathbf{B}$ – магнитная индукция. Подставляя (16) во второе уравнение Максвелла, получим:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times (\mathbf{E} + [\mathbf{V} \times \mathbf{B}]). \quad (17)$$

Преобразовав первое уравнение Максвелла умножением справа и слева на магнитную проницаемость μ , например, $\nabla \times \mathbf{B} = \mu\sigma\mathbf{E}$, где σ – удельная проводимость, можно получить новое уравнение, объединением первого и второго уравнений Максвелла путем исключения электрического поля:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{\mu\sigma} \Delta \mathbf{B} - \nabla \times [\mathbf{V} \times \mathbf{B}]. \quad (18)$$

Уравнение (18) называют иногда уравнением индукции с динамо- слагаемым. Оно представляет первые два уравнения Максвелла. Уравнение (18) позволяет определиться с пределами применимости стандартных уравнений Максвелла, опираясь на критерий подобия – магнитное число Рейнольдса $Re_m = L\mu\sigma|V|$, где L – характерный размер, указывающий место границы между ламинарностью и турбулентностью в магнитном поле.

В земных условиях $Re_m \leq 1$ из-за малых L на Земле. Это дает возможность отбросить второе слагаемое в (18) и получить стандартное уравнение индукции для Земли:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{\sigma\mu} \Delta \mathbf{B}. \quad (19)$$

Уравнение (19) абсолютно верное и отражает электродинамику на Земле, полностью подчиняющуюся стандартным уравнениям Максвелла. Они абсолютно верны в этом случае.

В космической электродинамике $Re_m \approx 10^{12} \div 10^{17}$ единиц из-за больших L , поэтому уравнение (18) можно переписать так:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times [\mathbf{V} \times \mathbf{B}]. \quad (20)$$

Уравнение (20) предполагает наличие турбулентности в магнитном поле в том числе из-за больших значений Re_m в космосе (из-за больших L).

В естественном электромагнитном поле на Земле, в связи со значительными размерами естественных источников критерий Рейнольдса $Re_m \approx 10^3 \div 10^5$. Поэтому в уравнении (18) нельзя отбрасывать слагаемые в правой части, что предопределяет появление гидромагнитных эффектов в естественном электромагнитном поле в атмосфере Земли (эксперименты Van Vleuten, Н.П. Беньковой, Д.Н. Четаева), которые не отражены в стандартных уравнениях Максвелла. Это требует корректировки стандартных уравнений Максвелла с учетом второго слагаемого в правой части (18). Эта корректировка закреплена теоремой 6 [2–5].

Теорема доказана.

Предпосылки к теореме 2 и сама теорема 2 ставят перед геофизической электродинамикой совершенно новую для нее проблему учета гидромагнитных эффектов при интерпретации наблюдаемых данных двух международных геофизических годов 1933 г. и 1957/58 гг. и всемирной магнитной съемки 1964/65 гг. Учет названных эффектов предопределяет введение в геофизическую электродинамику двух новых магнитных полей: тороидального магнитного поля $\mathbf{H}_T$ и полоидального $\mathbf{H}_P$, а также двух новых электрических полей: тороидального электрического поля $\mathbf{E}_T$ и полоидального $\mathbf{E}_P$. В физике эти поля известны и изучены автором в [3, 4] со ссылкой на более ранние публикации других авторов. В статьях [1–4] обосновано введение выше названных полей авторским способом, суть которого сводится к использованию всюду верной дивергенции магнитного поля $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ и тороидального разложения векторного потенциала $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$ в виде $\mathbf{A} = (Q\mathbf{r}) + \nabla \times (Q\mathbf{r})$ [1, 3], где r – радиус вектор, Q – скалярная функция класса $Q \in C^\infty$. Упомянутое выше разложение позволяет однозначно ввести названные выше электромагнитные поля вне источника по формулам. Обоснование в теореме 7.

$\mathbf{H}_T = \nabla \times (Q\mathbf{r})$ – двухкомпонентное тороидальное магнитное поле,

$\mathbf{H}_P = \nabla \times \nabla \times (Q\mathbf{r})$ – трехкомпонентное полоидальное магнитное поле,

$\mathbf{E}_T = -i\omega\mu\nabla \times (Q\mathbf{r})$ – двухкомпонентное тороидальное электрическое поле,

$\mathbf{E}_P = \frac{1}{\sigma'} \nabla \nabla \cdot (Q\mathbf{r})$ – трехкомпонентное полоидальное электрическое поле. Здесь

σ' – удельная проводимость области, в которой определено электрическое поле $\mathbf{E}_P$.

Соответствие размерностей во введенных выше полях объясняется тем, что дифференциальные операторы в них заданы в не штрихованных координатах вне источника. Тогда как интегралы по источникам заданы в штрихованных координатах и входят в выше названные определения в виде размерных констант, которые не изменяются при дифференцировании по не штрихованным координатам определений.

Следующие три теоремы относятся к теоремам существования тороидальных и полоидальных магнитных полей.

Теорема 3.

Безвихревое векторное поле $\nabla \times \mathbf{H} = 0$ с условием $\nabla \cdot \mathbf{H} = \rho$ при $\rho = \text{const}$ не допускает генерации векторного поля $\mathbf{H}_T = \nabla \times (Q\mathbf{r})$, если $\mathbf{H} \neq 0$, $\mathbf{H}_T, \mathbf{H}_P \neq 0$.

Действительно.

Спиральность $\mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{H}$ в безвихревом векторном поле равна нулю из-за $\nabla \times \mathbf{H} = 0$, тогда как спиральность векторного поля $\mathbf{H}_T$ нулю не равна по определению

$\mathbf{H}_T \cdot \nabla \times \mathbf{H}_T = \mathbf{H}_T \cdot \mathbf{H}_P \neq 0$. Отсутствие совпадения спиральностей вследствие влияния возвратной симметрии исключает взаимную генерацию векторных полей $\mathbf{H}_T$ и $\mathbf{H}_P$, что и требовалось доказать.

Теорема 4.

В соленоидальном векторном поле $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$, $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{P}$ ($\mathbf{P}$ – векторное поле) векторное поле $\mathbf{H}_T = \nabla \times (\mathbf{Qr})$ может быть сгенерировано, если $\mathbf{H} \neq 0$, $\mathbf{H}_T, \mathbf{H}_P \neq 0$, $\mathbf{P} \neq 0$.

Действительно.

Спиральности векторных полей $\mathbf{H}_T, \mathbf{H}_P$ не равны нулю. Спиральность соленоидального поля $\mathbf{H}$ не равна нулю $\mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{H} \neq 0$, вследствие $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{P}$. Спиральность векторного поля $\mathbf{H}_T$ также не равна нулю $\mathbf{H}_T \cdot \nabla \times \mathbf{H}_T \neq 0$ из-за $\nabla \times \mathbf{H}_T = \mathbf{H}_P$. Наличие спиральностей в обеих векторных полях способствует их взаимной генерации за счёт соотношений:

$$\nabla \times \mathbf{H}_T = \mathbf{H}_P, \quad \nabla \times \mathbf{H}_P = \nabla \times \nabla \times (\mathbf{Qr}) = -\nabla \times (\Delta \mathbf{Qr}) = \chi \nabla \times (\mathbf{Qr}) = \chi \mathbf{H}_T. \quad (21)$$

Здесь $\Delta \mathbf{Q} = -\chi \mathbf{Q}$, $\chi = \text{const}$. Это и требовалось доказать.

Теорема 5.

В электродинамике тороидальных и полоидальных электромагнитных полей существуют силовые в смысле силы Лоренца и несиловые электромагнитные поля при $\mathbf{H}_P, \mathbf{E}_T, \mathbf{H}_T, \mathbf{E}_P \neq 0$.

Доказательство.

Вычислим силу Лоренца для пары $\mathbf{H}_P, \mathbf{E}_T$:

$$\mathbf{F}_L = [\mathbf{j}_T \times \mathbf{B}_P] = [\sigma \mathbf{E}_T \times \mu \mathbf{H}_P] \neq 0, \quad \text{э.д.с.} = \int_L (\mathbf{E}_T \cdot d\mathbf{l}) = \int_W (\nabla \times \mathbf{E}_T \cdot d\mathbf{s}) = -\mu \int_W \left(\frac{\partial \mathbf{H}_P}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \right) \neq 0. \quad (22)$$

Формула (22) однозначно доказывает присутствие силы Лоренца в источниках, поэтому эти поля считаются силовыми. Сила Лоренца для пары $\mathbf{H}_T, \mathbf{E}_P$:

$$\bar{\mathbf{F}}_L = [\chi \mathbf{H}_T \times \mu \mathbf{H}_T] = 0, \quad \text{э.д.с.} = \int_L (\mathbf{E}_P \cdot d\mathbf{l}) = \int_W (\nabla \times \mathbf{E}_P \cdot d\mathbf{s}) = 0. \quad (23)$$

В формуле (23) первое выражение равно нулю из-за совпадающего направления сомножителей в векторном произведении. Во втором выражении $\mathbf{E}_P$ есть градиент дивергенции, ротор которого всюду равен нулю. Поэтому эти поля считаются несиловыми.

Теорема доказана.

Далее, согласно теореме 2 естественное электромагнитное поле подчиняется уравнению (18) из-за $\text{Re}_m \approx 10^3 \div 10^5$ единиц. Поэтому за счёт незначительных величин критерия подобия получить турбулентность в магнитном поле естественных источников вряд ли возможно. Поэтому требуется корректировка стандартных уравнений Максвелла. Она отражена в теореме 6.

Теорема 6.

Уравнения геофизической электродинамики записываются следующим образом, если $\mathbf{j}_T, \mathbf{j}_T^{CT}, \mathbf{H}_T, \mathbf{H}_P, \mathbf{E}_T', \mathbf{E}_P' \neq 0$.

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H}_P &= \mathbf{j}_T + \mathbf{j}_T^{CT}, \quad \nabla \times \mathbf{H}_T = \mathbf{H}_P, \quad \nabla \times \mathbf{E}_T' = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{E}_P' = 0, \\ \nabla \cdot (\mathbf{H}_P, \mathbf{H}_T) &= 0, \quad \nabla \cdot (\mathbf{E}_T', \mathbf{E}_P') = 0, \quad \mathbf{D}_{PT} = \varepsilon \mathbf{E}_{PT}', \quad \mathbf{B}_{PT} = \mu \mathbf{H}_{PT}. \end{aligned} \quad (23')$$

где $\mathbf{j}_T$ – двухкомпонентные тороидальные токи, $\mathbf{j}_T^{CT}$ – сторонние двухкомпонентные тороидальные токи, ε, μ – электромагнитные константы.

Теорема доказана.

Следующая теорема указывает на источники тороидального и полоидального магнитных полей в естественном электромагнитном поле на Земле и в космосе.

Теорема 7.

Источником тороидального несилового магнитного поля $\mathbf{H}_T$ и силового $\mathbf{H}_P$ являются тороидальные компоненты полного сферического электрического тока, если $\mathbf{j} \neq 0$.

Доказательство.

Оператор полного электрического тока, как известно, имеет вид:

$$\mathbf{j} = (\nabla \nabla \cdot - \nabla \times \nabla \times) \mathbf{A} \quad (24)$$

Спроектируем этот оператор на оси сферической системы координат, зафиксировав только тороидальные компоненты полного тока:

$$\begin{aligned} -j_\theta^\Pi &= \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial r^2} + \frac{2\partial A_\theta}{r\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} - \frac{A_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \\ &2 \frac{\cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2\partial A_r}{r^2 \partial \theta}, \\ -j_\varphi^\Pi &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 r A_\varphi}{\partial r^2} + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} - \\ &- \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta A_\varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial \theta \partial \varphi} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (25)$$

Сферические компоненты векторного потенциала через скалярную функцию Q можно выразить следующим образом:

$$A_\theta = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Q}{\partial \varphi}; \quad A_\varphi = -\frac{\partial Q}{\partial \theta}; \quad A_r = rQ. \quad (26)$$

Компоненты тороидального магнитного поля по определению имеют вид:

$$H_{T\theta} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Q}{\partial \varphi}; \quad H_{T\varphi} = -\frac{\partial Q}{\partial \theta}; \quad H_{Tr} \equiv 0. \quad (27)$$

Анализ формулы (25) показывает, что проекции уравнения для полного тока на оси сферической системы координат имеют среди слагаемых следующие выражения:

$$\frac{2\partial A_r}{r^2 \sin \theta \partial \varphi} = \frac{2}{r \sin \theta} \frac{\partial Q}{\partial \varphi} = \frac{2}{r} H_{T\theta}; \quad \frac{2\partial A_r}{r^2 \partial \theta} = \frac{2}{r} \frac{\partial Q}{\partial \theta} = -\frac{2}{r} H_{T\varphi}. \quad (28)$$

С учётом формул (26) правые части выражений (28) как раз и есть удвоенные компоненты тороидального магнитного поля, отнесённые к текущему радиусу, что даёт им размерность плотности тока.

Теорема доказана.

Таким образом, тороидальные компоненты сферической плотности тока всегда порождают тороидальные несиловые компоненты тороидального магнитного поля. Этот факт из теоремы 7 имеет принципиальный характер для областей с малыми значениями критерия подобия, так как для возникновения несилового тороидального магнитного поля в них не нужна турбулентность в магнитном поле, конвекция вещества и неравномерное вращение космических объектов.

Следующая фундаментальная теорема геофизической электродинамики касается разделения суммарного вихревого магнитного поля, наблюдаемого на регулярной

границе и создаваемого тороидальными токами, на тороидальную и полоидальную части [5].

Теорема 8.

Вихревое векторное поле $\mathbf{H}$ в сферической области V (в шаре с поверхностью S и радиусом R) однозначно разделяется (восстанавливается) выражением:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_T + \mathbf{H}_p = \nabla \times (\mathbf{Qr}) + \nabla \times \nabla \times (\mathbf{Qr}), \quad (29)$$

если известна нормальная составляющая $H_N(\mathbf{r})$ на S , а функция $Q(r, \theta, \varphi) \in C^\infty$, среднее которой $\langle Q \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi Q \sin \theta d\theta d\varphi = 0$ на S , а также $\mathbf{H}, \mathbf{H}_T, \mathbf{H}_p \neq 0$ и $\nabla \times \mathbf{H}_T = \mathbf{H}_p$ всюду.

Доказательство.

Если векторное поле $\mathbf{H}$ отвечает (29), то, чтобы доказать единственность разложения (29), необходимо выразить функцию Q через исходную нормальную компоненту векторного поля $\mathbf{H}_p$ или $\nabla \times \mathbf{H}_T$. Например,

$$\begin{aligned} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{H}_p) &= \mathbf{r} \cdot \nabla \times \nabla \times (\mathbf{Qr}) = \mathbf{r} \cdot \{ \nabla \nabla \cdot (\mathbf{Qr}) - \nabla^2 (\mathbf{Qr}) \} = \mathbf{r} \cdot \{ \nabla [\mathbf{r} \cdot \nabla Q + 3Q] - 2\nabla Q - \mathbf{r} \nabla^2 Q \} = \\ &= -r^2 \nabla^2 Q + \mathbf{r} \cdot \nabla (\mathbf{r} \cdot \nabla Q) + \mathbf{r} \cdot \nabla Q = -r^2 \nabla^2 Q + \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial Q}{\partial r}) = -DQ, \quad (30) \\ (\mathbf{r} \cdot \nabla \times \mathbf{H}_T) &= \mathbf{r} \cdot \nabla \times \nabla \times (\mathbf{Qr}) = -DQ. \end{aligned}$$

Здесь D – прямой оператор (оператор Бельтрами) определяется из (29), а именно:

$$D = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad (31)$$

и является частью оператора Лапласа без радиальных производных. Из (30) следует, что:

$$Q = -D^{-1}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{H}_p) = -D^{-1}(\mathbf{r} \cdot \nabla \times \mathbf{H}_T), \quad (32)$$

где D^{-1} – обратный оператор к оператору D , подлежащий определению.

Чтобы найти Q , необходимо определить прямой D и обратный D^{-1} операторы. Обратный оператор D^{-1} определяется следующим образом. Пусть $\psi(r, \theta, \varphi)$ и $f(r, \theta, \varphi)$ – произвольные скалярные функции, связанные соотношением:

$$D\psi(r, \theta, \varphi) = f(r, \theta, \varphi). \quad (33)$$

При этом функции $\psi(r, \theta, \varphi)$ и $f(r, \theta, \varphi) \in C^\infty$, среднее у которых на S равно нулю $\langle \psi \rangle = 0$, $\langle f \rangle = 0$. Обозначим:

$$S_n(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^n A_n^m P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad (34)$$

где $P_n^m(\cos \theta)$ – сферические функции, A_n^m – комплексные постоянные $S_n^m(\theta, \varphi) \in C^\infty$. Далее представим вспомогательные функции ψ, f их стандартными разложениями по сферическим функциям:

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(r) S_n(\theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \psi_n(r) A_n^m P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi}; \quad f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(r) \bar{S}_n^m(\theta, \varphi). \quad (35)$$

Суммирование по n начинается с единицы, свободный член отсутствует в связи наложенным условием нулевых средних для функций Q, ψ, f на сфере S . При этом функции $\psi_n(r)$ и $f_n(r)$ для $r \leq R$ пропорциональны r^n , а для $r \geq R$ соответственно $\frac{1}{r^{n+1}}$.

Применим прямой оператор D к функции $S_n(\theta, \varphi)$, воспользовавшись результатом (30):

$$DS_n(\theta, \varphi) = -n(n+1)S_n(\theta, \varphi). \quad (36)$$

Действительно, с учетом (29) и условий на функции $\psi_n(r)$ и $f_n(r)$, можно записать:

$$\begin{aligned} -r^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} r^n S_n(\theta, \varphi) + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} r^n S_n(\theta, \varphi) \right) &= Dr^n S_n(\theta, \varphi); & \text{отсюда} \\ -n(n+1)S_n(\theta, \varphi) &= DS_n(\theta, \varphi), \\ -r^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} \frac{1}{r^{n+1}} S_n(\theta, \varphi) + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r^{n+1}} S_n(\theta, \varphi) \right) &= D \frac{1}{r^{n+1}} S_n(\theta, \varphi); \\ -n(n+1)S_n(\theta, \varphi) &= DS_n(\theta, \varphi), \end{aligned}$$

Такая запись представляется наиболее удобной, так как в операторе D функции дифференцируются только по угловым координатам, согласно (30). Теперь применим к (32) оператор D и с учетом ранее полученных разложений функций ψ и f получим:

$$D\psi = -\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(r) n(n+1) S_n(\theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(r) \bar{S}_n(\theta, \varphi). \quad (37)$$

Функции $S_n(\theta, \varphi)$ и $\bar{S}_n(\theta, \varphi)$ отличаются только комплексными коэффициентами. Приравняем общие члены в (37), помня об абсолютной и равномерной сходимости рядов разложений функций ψ, f по сферическим функциям. Разделим правую и левую части на множитель $n(n+1)$. В результате получим:

$$\psi_n(r) S_n(\theta, \varphi) = -f_n(r) \frac{\bar{S}_n(\theta, \varphi)}{n(n+1)}. \quad (38)$$

Просуммировав все гармоники в (37), будем иметь:

$$\psi = -D^{-1} f = -\sum_{n=1}^{\infty} f_n(r) \frac{S_n(\theta, \varphi)}{n(n+1)}. \quad (39)$$

Формула (39) есть определение обратного оператора D^{-1} . Обратный оператор в (39), с нашей точки зрения, является более конструктивным для данной задачи, чем разработанный ранее интегральный обратный оператор для оператора Бельтрами, содержащий функцию Грина. Применим обратный оператор:

$$Q = -\sum_{n=1}^{\infty} r H_{Pn}(r) \frac{\tilde{S}_n(\theta, \varphi)}{n(n+1)} = -\sum_{n=1}^{\infty} r (\nabla \times H_T)_m(r) \frac{S'_n(\theta, \varphi)}{n(n+1)}. \quad (40)$$

Если учесть, что при $r = R$ имеем $H_{Pn}(R) = H_{Nn}(R)$,

$$H_N(r) = \sum_{n=1}^{\infty} H_{Nn}(R) S'_n(\theta, \varphi), \quad (41)$$

$$\nabla \times H_T = \nabla \times \nabla \times (Qr) = H_P, \text{ то}$$

$$Q = -\sum_{n=1}^{\infty} R H_{Nn}(R) \frac{\tilde{S}_n(\theta, \varphi)}{n(n+1)}, \quad (42)$$

где R – радиус шара.

Функция Q определяется однозначно и позволяет по отдельности вычислить вихревое тороидальное магнитное поле $\mathbf{H}_T$ и вихревое полоидальное магнитное поле $\mathbf{H}_P$, согласно (29).

Теорема доказана.

Для геофизической электродинамики весьма актуальной является проблема отделения тороидальных и полоидальных магнитных полей источников, находящихся как внутри шара, так и вне его. Решение этой проблемы дает теорема 9. Эта теорема является аналогом известной классической теоремы Гаусса-Шмидта о разделении главного геомагнитного поля на внешнее и внутреннее.

Теорема 9.

Отделение тороидальных и полоидальных векторных полей источников, расположенных за пределами шара, разрешимо единственным образом, если известны внешняя нормальная компонента $H_N(\mathbf{r})$ и одна из двух касательных компонент $H_\tau(\mathbf{r})$ суммарного векторного поля $\mathbf{H}$ на поверхности S шара V .

Доказательство.

Пусть на S известна суммарная скалярная функция $Q = Q^e + Q^i$, состоящая из внешней Q^e и внутренней Q^i частей. С учетом формул (42) можно записать на поверхности S :

$$Q^e + Q^i = - \sum_{n=1}^{\infty} R \frac{S_n(\theta, \varphi)}{n(n+1)} \left[A_n \frac{1}{R^{n+1}} + B_n R^n \right], \quad (43)$$

где A_n и B_n – комплексные постоянные, соответственно внешней A_n и внутренней B_n функции Q . Тороидальные и полоидальные компоненты магнитного поля на поверхности шара S вычисляются с использованием определений $\mathbf{H}_T$ и $\mathbf{H}_P$:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_T &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (Q^e + Q^i) \mathbf{e}_\theta - \frac{\partial}{\partial \theta} (Q^e + Q^i) \mathbf{e}_\varphi, \\ \mathbf{H}_P &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial \theta} (Q^e + Q^i) \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial \varphi} (Q^e + Q^i) \mathbf{e}_\varphi - \\ &\quad - \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} (Q^e + Q^i) - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} (Q^e + Q^i) \right) \mathbf{e}_r. \end{aligned} \quad (44)$$

Помня о зависимости функции Q от радиуса r для внешних и внутренних источников и опуская элементарные выкладки, запишем компоненты полоидального поля следующим образом:

$$\begin{aligned} H_{P\theta} &= - \frac{n}{r^{n+2}} \frac{\partial}{\partial \theta} Q^e + (n+1) r^{n-1} \frac{\partial}{\partial \theta} Q^i, \\ H_{P\varphi} &= - \frac{n}{r^{n+2}} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} Q^e + (n+1) r^{n-1} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} Q^i, \\ H_{Pr} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[\cos \theta \frac{\partial (Q^e + Q^i)}{\partial \theta} + \sin \theta \frac{\partial^2 (Q^e + Q^i)}{\partial \theta^2} - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 (Q^e + Q^i)}{\partial \varphi^2} \right] \end{aligned} \quad (45)$$

Учитывая формулы (43), (44) запишем касательные компоненты суммарного магнитного поля и его нормальную компоненту в следующем виде:

$$H_{\tau\theta} = - \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\theta, \varphi) \frac{1}{n(n+1)} \left[-A_n \frac{n}{R^{n+1}} + B_n (n+1) R^n \right],$$

$$H_{\tau\varphi} = -\sum_{n=1}^{\infty} Y_n(\theta, \varphi) \frac{1}{n(n+1)} \left[-A_n \frac{n}{R^{n+1}} + B_n(n+1)R^n \right], \quad (46)$$

$$H_N = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(\theta, \varphi) \frac{1}{n(n+1)} \left[A_n \frac{1}{R^{n+1}} + B_n R^n \right].$$

Здесь $X_n(\theta, \varphi), Y_n(\theta, \varphi), Z_n(\theta, \varphi) \in C^\infty$ – сложные угловые функции, производные от известной функции $S_n(\theta, \varphi)$. Формулы (46) указывают на то, что любая пара, составленная из одной касательной компоненты и нормальной, позволяет разделить коэффициенты внешних и внутренних относительно поверхности S векторных полей единственным образом, поскольку определитель разделяющих уравнений отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{R^{n+1}}, & R^n \\ -\frac{n}{R^{n+1}}, & (n+1)R^n \end{vmatrix} = \frac{(2n+1)}{R}. \quad (47)$$

Раздельное вычисление Q^e и Q^i позволяет восстановить на поверхности шара S полоидальное и тороидальное векторные поля как от источников, расположенных внутри шара, так и от внешних источников.

Теорема доказана.

В геофизической электродинамике актуальной остается проблема о возможности воспроизведения тороидальных и полоидальных магнитных полей с помощью одной скалярной функции. Следующая теорема решает эту проблему.

Теорема 10.

Тороидальные несилловые и полоидальные силовые электромагнитные поля воспроизводятся с помощью одной скалярной функции Q .

Доказательство.

Скалярная функция Q определяется с помощью следующих обратных операторов:

$$Q = -D^{-1}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{H}_p) = -D^{-1}(\mathbf{r} \cdot \nabla \times \mathbf{H}_T), \quad (48)$$

где D^{-1} – обратный оператор к оператору D , подлежащий определению.

Принимая во внимание тороидальное разложение для $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, можно показать, что если в формуле для $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ использованы две произвольные скалярные функции вида $A(r) = (Tr) + \nabla \times (Qr)$, то, поскольку векторное магнитное поле $\mathbf{H}_T$ не содержит нормальную компоненту к поверхности шара S и не может быть однозначно определено согласно теореме Гельмгольца, то на тороидальное магнитное поле $\mathbf{H}_T$ необходимо наложить условие $\nabla \times \mathbf{H}_T = \mathbf{H}_p$. Тогда прямые операторы $-DQ = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{H}_p)$ и $-DT = (\mathbf{r} \cdot \nabla \times \mathbf{H}_T)$ будут иметь следующие обратные: $-D^{-1}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{H}_p)$ и $-D^{-1}(\mathbf{r} \cdot \nabla \times \mathbf{H}_T) = -D^{-1}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{H}_p)$. Это означает, что $T = Q$, и поэтому в выражении для $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ достаточно использовать одну произвольную скалярную функцию, в данном случае функцию Q . В этом случае компоненты электромагнитного поля можно выразить через одну скалярную функцию или три компоненты векторного потенциала в виде:

$$\begin{aligned}
 H_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} (Qr) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r A_\varphi, \\
 H_{r\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (Qr) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r A_\theta, \\
 H_{r\theta} &= -\frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial(Qr)}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial(Qr)}{\partial \varphi} \right) = \\
 &\quad -\frac{1}{r \sin \theta} \left(-\frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\sin \theta} A_\varphi + \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right), \\
 H_{T\theta} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (Qr) = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} A_r, \quad H_{T\varphi} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (Qr) = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} A_r, \\
 E_{T\theta} &= -i\omega\mu \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (Qr) = -i\omega\mu A_\theta, \quad E_{T\varphi} = -i\omega\mu \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (Qr) \right) = -i\omega\mu A_\varphi, \\
 E_{r\theta} &= \frac{1}{\sigma'} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 (Qr) = \frac{1}{\sigma'} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 A_r, \\
 E_{r\varphi} &= \frac{1}{\sigma'} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 (Qr) = \frac{1}{\sigma'} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 A_r, \\
 E_{Pr} &= \frac{1}{\sigma'} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 (Qr) = \frac{1}{\sigma'} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 A_r.
 \end{aligned} \tag{49}$$

Теорема доказана.

Доказательство предыдущих теорем создали предпосылки для доказательства теоремы о взаимной генерации тороидальных и полоидальных магнитных полей как в естественных условиях (в космосе), так и в экспериментах в токамаках и пробкотронах [4, 7].

Теорема 11.

Взаимодействие тороидальных и полоидальных магнитных полей при определенных условиях приводит их к взаимной генерации.

Доказательство.

По определению $\mathbf{H}_T = \nabla \times (\mathbf{Qr})$, $\mathbf{H}_P = \nabla \times \nabla \times (\mathbf{Qr})$. Вихри этих полей (21):

$$\nabla \times \mathbf{H}_T = \mathbf{H}_P, \quad \nabla \times \mathbf{H}_P = \chi \mathbf{H}_T,$$

При определенных значениях напряженности $\mathbf{H}_T$ и $\mathbf{H}_P$, а также при достаточной величине константы $\chi \neq 0$, эти поля взаимно генерируют друг друга.

Теорема доказана.

В семидесятых годах прошлого века в научной печати подвергалась острой дискуссии так называемая проблема E_z , а именно наличие вертикальной компоненты электрического поля коротко-периодических вариаций земного поля в атмосфере Земли. Из эксперимента Д.Н. Четаева природа этой компоненты оставалась не достаточно ясной, а именно какова природа этой компоненты – индукционная или потенциальная. Теорема 12 дает однозначный ответ на этот дискуссионный вопрос. Полная формула для электрического поля с индукционным слагаемым имеет вид [6]:

$$\mathbf{E}_P = -i\omega\mu(\mathbf{Qr}) + \frac{1}{\sigma'} \nabla \nabla \cdot (\mathbf{Qr}). \tag{50}$$

Теорема 12.

Индукционное слагаемое $-i\omega\mu(\mathbf{Qr})$ компенсируется потенциальным слагаемым

$$\frac{1}{\sigma'} \nabla \nabla \cdot (\mathbf{Qr}) \text{ если } (\mathbf{Qr}) \neq 0.$$

Доказательство.

Для доказательства разобьём пространство на две части относительно регулярной границы S . Внутреннюю часть представим функцией $Q^i(r, \theta, \varphi, t)$ и её разложением:

$$Q^i(r, \theta, \varphi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} K_{n+1/2}(\mathfrak{x} \frac{r}{R}) S_n(\theta, \varphi). \quad (51)$$

Здесь $K_{n+1/2}(\mathfrak{x} \frac{r}{R})$ – присоединённая функция Бесселя полуцелого индекса $\mathfrak{x} = i\omega\mu\sigma R^2 - \varepsilon\omega^2\mu R^2$, $S_n(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^n A_n^m P_n^m(\cos\theta) e^{im\varphi}$, $S_n(\theta, \varphi) \in C^\infty$, R – радиус области, отделенной регулярной границей S , r – текущий радиус.

Внешнюю часть представим функцией $Q^e(r, \theta, \varphi, t)$:

$$Q^e(r, \theta, \varphi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} I_{n+1/2}(\mathfrak{x} \frac{r}{R}) S_n(\theta, \varphi). \quad (52)$$

Здесь и в (51) A_n^m – комплексные постоянные, $P_n^m(\cos\theta)$ – сферические функции. Множитель $e^{i\omega t}$ в правой и левой частях формул (51) и (52) опущен. Аргументы Бесселевых функций отделены от нуля и бесконечности.

Для доказательства потребуются первые и вторые производные Бесселевых функций, входящих в (51) и (52). Чтобы не загромождать текст выкладками, проведем доказательство только для функции $Q^i(r, \theta, \varphi, t)$. Для функции $Q^e(r, \theta, \varphi, t)$ доказательство проводится аналогично. Сложением результатов для внутренней функции и внешней можно легко получить окончательный результат. Итак, производные функции $Q^i(r, \theta, \varphi, t)$ по координате r есть:

$$\frac{\partial Q^i}{\partial r} = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(\theta, \varphi) K'_{n+1/2}(\frac{\mathfrak{x}r}{R}) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(\theta, \varphi) \left[-\frac{\mathfrak{x}}{R} K_{n-1/2}(\frac{\mathfrak{x}r}{R}) - \frac{n+1/2}{r} K_{n+1/2}(\frac{\mathfrak{x}r}{R}) \right], \quad (53)$$

$$\frac{\partial^2 Q^i}{\partial r^2} = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(\theta, \varphi) K''_{n+1/2}(\frac{\mathfrak{x}r}{R}) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(\theta, \varphi) \left[\left(\frac{(n+1/2)(n+3/2)}{r^2} + \frac{\mathfrak{x}^2}{R^2} \right) K_{n+1/2}(\frac{\mathfrak{x}r}{R}) + \frac{\mathfrak{x}}{rR} K_{n-1/2}(\frac{\mathfrak{x}r}{R}) \right].$$

Преобразуем радиальную компоненту из (50), опустив верхний штрих:

$$E_{Pr}^i = -i\omega\mu Q^i r + \frac{1}{\sigma'} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 Q^i r = \frac{1}{\sigma'} \left[-\mathfrak{x}^2 Q r + r \frac{\partial^2 Q^i}{\partial r^2} + 4 \frac{\partial Q^i}{\partial r} \right]. \quad (54)$$

В (53) и (54) аргументы у функции $Q^i(r, \theta, \varphi, t)$ опущены из-за экономии места.

Теперь вычислим радиальную компоненту E_{Pr}^i :

$$E_{Pr}^i = \frac{1}{\sigma'} \sum_{n=1}^{\infty} S_n(\theta, \varphi) \left[-\mathfrak{x}^2 r K_{n+1/2}(\frac{\mathfrak{x}r}{R}) + r \left(\frac{(n+1/2)(n+3/2)}{r^2} + \frac{\mathfrak{x}^2}{R^2} \right) K_{n+1/2}(\frac{\mathfrak{x}r}{R}) + \frac{\mathfrak{x}}{R} K_{n-1/2}(\frac{\mathfrak{x}r}{R}) - \frac{4\mathfrak{x}}{R} K_{n-1/2}(\frac{\mathfrak{x}r}{R}) - \frac{4(n+1/2)}{r} K_{n+1/2}(\frac{\mathfrak{x}r}{R}) \right]. \quad (55)$$

В (55) необходимо привести подобные члены с учётом того, что $\mathfrak{x}^2 = \mathfrak{x}^2 R^2$. В результате получим:

$$E_{Pr}^i = \frac{1}{\sigma'} \sum_{n=1}^{\infty} S_n(\theta, \varphi) \left[-\mathfrak{x}^2 r K_{n+1/2}(\frac{\mathfrak{x}r}{R}) + \mathfrak{x}^2 r K_{n+1/2}(\frac{\mathfrak{x}r}{R}) + \frac{n(n-2)-5/4}{r} K_{n+1/2}(\frac{\mathfrak{x}r}{R}) - \frac{3\mathfrak{x}}{R} K_{n-1/2}(\frac{\mathfrak{x}r}{R}) \right]. \quad (56)$$

Нетрудно заметить, что в (56) индукционное слагаемое исчезает. Остаётся только потенциальная часть. Аналогичный результат достигается и для E_{Pr}^e . Поэтому тороидальное и полоидальное электрические поля для $t > 0$ можно определить следующим образом [6]:

$$E'_T = -i\omega\mu\nabla \times (Q\mathbf{r}), \quad E'_P = \frac{1}{\sigma'} \nabla \nabla \cdot (Q\mathbf{r}). \quad (57)$$

E_{Pz} – потенциальна согласно (57).

Теорема доказана.

Фундаментальной проблемой для геофизической электродинамики остается состояние калибровок Кулона и Лоренца в векторном потенциале при его тороидальном ортогональном разложении в (2) и (3). Следующая теорема дает ответ на этот вопрос.

Теорема 13.

Калибровочные условия Кулона $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ или Лоренца $\nabla \cdot \mathbf{A} = \sigma\varphi$ для вспомогательного векторного поля $\mathbf{A}$ однозначно выполняются, если

$$Q(r, \theta, \varphi) = Q(\theta, \varphi) / r^3. \quad (58)$$

Действительно.

Из разложения (2) следует, что

$$\mathbf{A} = (Q\mathbf{r}) + \nabla \times (Q\mathbf{r}) + \nabla \varphi. \quad (59)$$

Вычислим дивергенцию от векторного поля (59):

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot (Q\mathbf{r}) + \nabla \cdot \nabla \times (Q\mathbf{r}) + \nabla \cdot \nabla \varphi. \quad (60)$$

В равенстве (60) второе слагаемое равно нулю по определению для дивергенции ротора. Первое слагаемое также равно нулю из-за условия (67):

$$\nabla \cdot (Q\mathbf{r}) = Q\nabla \cdot \mathbf{r} + \mathbf{r} \nabla Q = \frac{3}{r^3} Q(\theta, \varphi) - \frac{3}{r^3} Q(\theta, \varphi) \equiv 0. \quad (61)$$

В третьем слагаемом рассматриваются два варианта:

$$\Delta\varphi = \begin{cases} 0 \\ \sigma\varphi \end{cases}. \quad (62)$$

где: $\sigma = \text{const}$.

Из формул (59-62) следуют два указанных варианта калибровок вспомогательного векторного поля $\mathbf{A}$: калибровка Кулона $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ или калибровка Лоренца $\nabla \cdot \mathbf{A} = \sigma\varphi$. Теорема доказана.

Важным результатом выше названных теорем является доказательство наличия несилового тороидального магнитного поля в главном геомагнитном поле Земли до 10% напряженности, а также в его спокойных солнечно-суточных вариациях до 40% напряженности в атмосфере Земли [8, 9].

Теорема 14.

Тороидальное несиловое магнитное поле содержится в наблюдаемых данных солнечно-суточных вариаций в атмосфере Земли.

Доказательство занимает 133 страницы в монографии [8].

Теорема 15.

Полоидальное силовое магнитное поле и тороидальное несиловое содержатся в наблюдаемых данных двух МГТ 1933 г. и 1957/58 гг., а также в данных всемирной магнитной съемки 1964/65 гг.

Доказательство занимает 268 страниц и содержится в монографии [9].

Заключение

Сформулированные выше и доказанные теоремы формируют облик геофизической электродинамики в рамках нового научного направления –

математическая геофизика, введённого в научный оборот академиками АН СССР М.М. Лаврентьевым и А.С. Алексеевым.

1. Аксёнов В.В. О некоторых соленоидальных векторных полях в сферических областях // Дифференциальные уравнения. – 2012. – Т. 48, № 7. – С. 1056–1059.
2. Аксёнов В.В. Адаптация электродинамик Максвелла-Паркера-Моффата к электромагнитным полям, наблюдаемым в атмосфере Земли // Изв. ВУЗов. Физика. – 2017. – Т. 60, № 3. – С. 11–18.
3. Аксёнов В.В. Тороидальное разложение векторного потенциала магнитного поля и его приложения // ВМУ. Серия 3. Физика. Астрономия. – 2015, № 6. – С. 127–133.
4. Аксёнов В.В. Несиловые и силовые электромагнитные поля // Изв. ВУЗов. Физика. – 2016. – Т. 59, № 3. – С. 3–10.
5. Аксёнов В.В. Несиловые электромагнитные поля в экспериментах // Сб. статей XIII межд. конф. Наука России. Цели и задачи. – С. 63–70.
6. Аксёнов В.В. Основы геомагнетизма. – Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2012. – 133 с.
7. Аксёнов В.В. О взаимной генерации магнитных полей в токамаках и её подавлении // Изв. ВУЗов. Физика. – 2018. – Т. 61, № 9. – С. 171–172.
8. Аксёнов В.В. Тороидальное поле в атмосфере Земли. – Новосибирск: ИВМиМГ СО АН СССР, 1997. – 132 с.
9. Аксёнов В.В. Электромагнитное поле Земли. – 3-е изд., перераб. и доп. – Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2010. – 269 с.