Леонова О.В.

Простейшая модель страхования

Байкальский государственный университет
(Россия, Иркутск)

doi: 10.18411/sr-10-04-2020-23

idsp: sciencerussia-10-04-2020-23

Аннотация

В статье рассматривается простейшая модель работы страховой компании, которая строится с помощью центральной предельной теоремы.

Ключевые слова: страховая математика, модели страхования, страховые премии, страховые выплаты, таблицы смертности.

Модели страхования жизни делятся на две большие группы: краткосрочные и долгосрочные. К первой группе относятся модели, в которых не учитывается изменение ценности денег во времени, обусловленное инфляцией и другими факторами. Обычно в качестве временного интервала выбирают 1 год. Если же расчеты осуществляются с учетом возможной инфляции, то модели страхования называют долгосрочными [1].

Пусть денежные суммы (величины) $p_1, p_2, \dots, p_n$, которые страховые платят страховой компании, будут страховыми премиями.

Величины $b_1, b_2, \dots, b_v$, $v \leq n$, которые платят страховые компании в результате наступления V страховых случаев – страховыми выплатами.

Очевидно, что $b_j \gg p_j$ иначе никто страховаться не будет. Купив за p рублей страховой полис, застрахованный избавит себя от риска финансовых потерь, связанных с неопределенностью страхового случая. Этот риск примет на себя страховая компания, для которой риск заключается в случайности иска, который может быть ей предъявлен.

В страховой математике решаются следующие проблемы [2]:

1. Нахождение правильного соотношения между премиями p и выплатами b . Сюда входит расчет нетто-премий, брутто-премий, расчет выплат и т.д. Отметим, что нетто-премии соответствуют нулевой средней прибыли страховой компании.
2. Расчет вероятности разорения, которая служит основой для принятия важнейших решений. Если обозначить через U капитал компании или ее резерв, а через $S = b_1 + b_2 + \dots + b_v$ сумму выплат, где b_j – иск j -го страхователя к компании, то вероятность разорения имеет вид $P(S > U)$, а вероятность неразорения $P(S \leq U)$. Очевидно, что $P(S > U) + P(S \leq U) = 1$.
3. Расчет резервов страховой компании.

Решение указанных проблем проиллюстрируем на примере простейшей модели работы страховой компании, построенной с использованием центральной предельной теоремы [3].

Рассмотрим последовательность независимых случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$, имеющих математическое ожидание $MX_i = a_i$ и дисперсии $DX_i = \sigma_i^2$. Из них образуем последовательность центрированных и нормированных случайных величин Y_n , $n = 1, 2, 3, \dots$

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n a_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - A_n}{B_n}.$$

Согласно центральной предельной теореме при достаточно общих предположениях о законах распределения случайных величин X_i , последовательность функций распределения величин Y_n , $(n \rightarrow \infty)$ сходится $\forall n$ к функции $\Phi^*(x)$ стандартного нормального закона

$$F_{Y_n}(x) = P\left\{\frac{\sum_{i=1}^n X_i - A_n}{B_n} < x\right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Рассмотрим следующую идеализированную схему. Пусть в начале года в компании застраховано n мужчин возраста $x=30$ лет. Будем считать, что каждый платит премию p , то есть компания получила суммарный доход $n \cdot p$, который и будет составлять ее резерв $U = n \cdot p$. Обозначим через $b_i = 1$ иски, предъявляемые к фирме, если в течение года i -й клиент умрет. Воспользуясь таблицами смертности [4], найдем:

$$P(b_i = 1) = q_{30} = 0,00231, \quad P(b_i = 0) = p_{30} = 1 - 0,00231 = 0,99769.$$

Вероятность того, что компания не разорится равна

$$P\left(\sum_{i=1}^n b_i \leq U\right) = P\left\{\frac{\sum b_i - M \sum b_i}{\sqrt{D \sum b_i}} \leq \frac{U - M \sum b_i}{\sqrt{D \sum b_i}}\right\}.$$

Учитывая дискретные случайные величины b_i , $i = \overline{1, n}$, имеем

$$M b_i = 1 \cdot q_{30} + 0 \cdot p_{30} = q_{30} = 0,00231,$$

$$D b_i = 1^2 \cdot q_{30} + 0^2 \cdot p_{30} - (0,00231)^2 = 0,0023047.$$

Так как иски b_i независимы, то $M \sum b_i = \sum M b_i = n \cdot 0,00231$, $D \sum b_i = \sum D b_i = n \cdot 0,0023047$,

$$P\left(\sum_{i=1}^n b_i \leq U\right) = P\left\{\frac{\sum b_i - 0,00231n}{\sqrt{0,0023047n}} \leq \frac{U - 0,00231n}{\sqrt{0,0023047n}}\right\}.$$

Для числа застрахованных $n = 3000$ человек получим

$$P\left(\sum_{i=1}^n b_i \leq U\right) = P\left\{\frac{\sum b_i - 6,93}{\sqrt{6,9141}} \leq \frac{U - 6,93}{\sqrt{6,9141}}\right\} \approx \Phi^*\left(\frac{U - 6,93}{\sqrt{6,9141}}\right).$$

Пусть руководство компанией устраивает вероятность неразорения 0,95, тогда $\Phi^*\left(\frac{U - 6,93}{\sqrt{6,9141}}\right) = 0,95 \Rightarrow \frac{U - 6,93}{2,6294676} = 1,65 \Rightarrow U = 11,269$, следовательно, страховая компания должна иметь резерв $U = 11,269$, а плата за страховку (премия) должна составить $p = \frac{U}{n} = \frac{11,269}{3000} = 0,0037563$ часть от иска $b = 1$.

Если $b = 100000$ рублей, то премия составит
 $p = 100000 \cdot 0,0037563 = 375,63$ рубля в год.

Таблица 1

Смертность населения России для календарного года 2018 (мужчины) [4]

Возраст x (полное число исполнившихся лет)	Коэффициент смертности в возрасте x лет	Вероятность смерти $q(x)$ в интервале возрастов от x до $x + 1$	Число доживших до возраста x лет $l(x)$	Число умерших $d(x)$ в возрасте x лет	Ожидаемая продолжительность предстоящей жизни m_x в возрасте x лет
29	0,00542	0,00540	95144	514	36,26
30	0,00628	0,00626	94630	593	35,45
31	0,00643	0,00641	94038	603	34,67
32	0,00691	0,00688	93435	643	33,89
33	0,00695	0,00692	92791	643	33,13
34	0,00755	0,00752	92149	693	32,35
35	0,00787	0,00783	91456	717	31,59

1. Архипов, А.П. Андеррайтинг в страховании: Теоретический курс и практикум: учебное пособие / А.П. Архипов. - М.: Юнити-Дана, 2015. - 240 с.
2. Никулина, Н.Н. Страховой маркетинг: учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по специальности «Финансы и кредит» / Н.Н. Никулина, Л.Ф. Суходоева, Н.Д. Эриашвили. - М.: Юнити-Дана, 2015. - 503 с.
3. Балдин, К.В. Основы теории вероятностей и математической статистики: учебник / К.В. Балдин, В.Н. Башлыков, А.В. Рокосуев; под ред. К.В. Балдина. - М.: Флинта, 2010. - 245 с.
4. The Human Mortality Database. Russia. Life tables by year of death (period), 1959-2018, 1x1, female, male. www.demoscope.ru.