Горбатовский А.А.
Исследование устойчивости вращающегося диска

*Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана*

doi: 10.18411/sr-10-04-2019-74

idsp: sciencerussia-10-04-2019-74

Аннотация

В статье представлены результаты исследования устойчивости вращающегося диска, который нагревается по наружному контуру. Найдено стационарное температурное поле диска, и получены критические зависимости скорости вращения от температуры, при которых возникают новые формы равновесия.

Ключевые слова: критическая нагрузка, формы равновесия, вращающийся диск.

Abstract

The paper present the decision of problem stability revolving thin disk, which heat in external contour. Recived decision the critical temperature external contour as function rotation disk.

Вопрос об устойчивости вращающихся дисков возникает при изучении коробления дисковых пил, которые работают при больших скоростях вращения и значительного нагрева на внешнем зубчатом контуре, возникающего при распиловке брёвен. В этом случае, задача исследования коробления дисковых пил становится актуальной.

Целью настоящего исследования является определение температуры наружного контура диска, при котором возможна потеря устойчивости плоской формы его равновесия. Поскольку напряжения, возникающие в диске при работе, зависят от центробежных сил и температуры нагрева наружного контура, то первой частью исследования была задача определения поля температур в диске при его нагреве по наружному контуру.

Температурное поле диска при его нагревании по внешнему контуру можно найти из известных результатов [1].

Считается, что диск имеет постоянную толщину и известна температура нагрева наружного контура T_0 . Боковая поверхность охлаждается окружающим воздухом. Температурное поле считается стационарным. Коэффициент теплоотдачи α известен.

Окончательно, решение тепловой задачи для средней (по толщине) температуры диска имеет вид:

$$\theta = \frac{2 \sin n_1}{(n_1 + \sin n_1 \cos n_1)} \exp \left(2n_1 \frac{R}{h} \left(\frac{r}{R} - 1 \right) \right) \sqrt{\frac{R}{r}}, \quad (1)$$

где: n_1 – наименьшее значение числа n , найденного из трансцендентного уравнения
$$n = Bi * \operatorname{ctg}(n)$$

Значение n_1 принимает значения от 0 (для $Bi \rightarrow 0$) до $\pi/2$ (для $Bi \rightarrow \infty$).

$Bi = \frac{ah}{2\lambda}$ – критерий Био,

λ – коэффициент теплопроводности,

R – наружный радиус диска,

h – толщина диска.

Исследование устойчивости вращающегося диска

Начальные усилия в срединной поверхности диска постоянной толщины определяются по следующим формулам [3]:

Радиальные усилия

$$T_1 = Eh \left[t(1) - \left(\frac{R}{r} \right)^2 t \left(\frac{r}{R} \right) \right] + R^2 \frac{3+\nu}{8} \rho h \omega^2 \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right);$$

Окружные усилия

$$T_2 = Eh \left[t(1) + \left(\frac{R}{r} \right) t \left(\frac{r}{R} \right) - \alpha \theta \left(\frac{r}{R} \right) \right] + R^2 \rho h \omega^2 \left[\frac{3+\nu}{8} - \frac{1+3\nu}{8} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

$$t \left(\frac{r}{R} \right) = \int \alpha \frac{r}{R} \theta \left(\frac{r}{R} \right) d \left(\frac{r}{R} \right)$$

где:

α – коэффициент линейного расширения материала диска,

ν – коэффициент Пуассона материала диска,

E – модуль упругости,

ρ – плотность материала диска,

Дифференциальное уравнение устойчивости для диска в полярной системе координат имеет вид [4]:

$$D \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) - T_1^0 \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - T_2^0 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) = 0$$

В это уравнение входят только чётные производные по углу φ , поэтому решение данного уравнения можно найти в виде ряда:

$$w(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(r) \cos(n\varphi) \quad (2)$$

где: $w_n(r)$ – функции координаты r .

Подставляя это выражение в уравнение устойчивости, приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$D \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \right) \left(\frac{d^2 w_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_n}{dr} - \frac{n^2 w_n}{r^2} \right) - T_1^0 \frac{d^2 w_n}{dr^2} - T_2^0 \left(\frac{1}{r} \frac{dw_n}{dr} - \frac{n^2 w_n}{r^2} \right) = 0$$

$$n = 0, 1, 2 \dots$$

Решения этих уравнений, удовлетворяющих заданным граничным условиям, дают собственные значения. Наименьшее из собственных значений параметра нагрузки является критическим.

Граничные условия, которым должны удовлетворять решения дифференциальных уравнений имеют вид:

$$\begin{array}{lll} r=0 & w=0 & \frac{dw}{dr}=0 \\ r=R & M_1=0 & Q_1^*=0 \end{array}$$

где: M_1 – радиальный момент,

Q_1^* – поперечная радиальная приведённая сила [5].

Выражение для радиального момента M_1 после подстановки решения (2) приобретает вид:

$$\frac{d^2 w_n}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw_n}{dr} - \frac{\nu n^2}{r^2} w_n = 0$$

Для приведённой поперечной силы Q_1^* используя разложение вида (2) получим:

$$Q_1^* = Q_1 + D(1-\nu) \frac{n^2}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{w_n}{r} \right)$$

где:

$$Q_1 = -\frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 w_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_n}{dr} - \frac{n^2}{r^2} w_n \right)$$

Окончательно, второе граничное условие имеет вид:

$$\frac{d^3 w_n}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w_n}{dr^2} - \left[\frac{1+(2-\nu)n^2}{r^2} \right] \frac{dw_n}{dr} + \frac{(3-\nu)n^2}{r^3} w_n = 0$$

Переходя к безразмерной форме, получим следующее уравнение:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{2}{x} \frac{d^3 y}{dx^3} - \left[\frac{2n^2+1}{x^2} + \frac{T_r^0 R^2}{D} \right] \frac{d^2 y}{dx^2} + \left[\frac{2n^2+1}{x^3} - \frac{T_\phi^0 R^2}{Dx} \right] \frac{dy}{dx} + \left[\frac{n^4-4n^2}{x^4} + \frac{n^2 T_\phi^0 R^2}{Dx^2} \right] y = 0$$

$$x = \frac{1}{R} r \quad y = \frac{1}{R} w_n$$

Где обозначено:

Граничные условия в безразмерной форме имеют вид:

$$x=0 \quad y=0 \quad \frac{dy}{dx} = 0$$

$$x=1 \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \nu \frac{dy}{dx} - \nu n^2 y = 0$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{d^2 y}{dx^2} - \left[1+(2-\nu)n^2 \right] \frac{dy}{dx} + (3-\nu)n^2 y = 0$$

Далее, используя метод начальных параметров, находятся зависимости температуры диска на внешнем краю в зависимости от скорости вращения диска при которых возможны ненулевые решения дифференциального уравнения при заданных граничных условиях.

Для примера, были рассчитаны критические зависимости температуры диска от его скорости вращения для конкретного случая:

$R=250$ мм – радиус диска,

$h=2,5$ мм – толщина диска,

$a=500$ Вт/м²К – коэффициент теплоотдачи,

$\lambda=50$ Вт/м К – коэффициент теплопроводности материала диска,

$\alpha=12 \cdot 10^{-6}$ 1/°К – коэффициент линейного расширения материала диска.

Графики критических температур, в зависимости от скорости вращения, приведены на рис.2.

Рис.1. Графики критических температур, в зависимости от скорости вращения диска.

1. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.
2. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. – Долгопрудный: Интеллект, 2007. – 247с.
3. Биргер И.А., Демьянушко И.В. Расчёт вращающихся дисков. – М.: Машиностроение, 1999. – 385с.
4. Алфутов Н.А., Колесников К.С. Устойчивость движения и равновесия– М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2003. – 256 с.: ил.
5. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. Статика. М., «Машиностроение», 1977. – 488с.