Гатауллина Л.А., Мещанов А.С., Нуртдинов А.А., Сиразетдинов Р.Т.
Управление многомерными нелинейными объектами на скользящих режимах с
учётом неопределённых факторов и его применение

Казанский национально-исследовательский технический университет им. А.Н.

Туполева

(Россия, Казань)

doi: 10.18411/sr-10-02-2020-02

idsp: sciencerussia-10-02-2020-02

Аннотация

Для динамических систем с нелинейными объектами разработаны новые методы формирования управлений подвижных многообразий скольжения и векторных управлений, приводящих систему в скользящие режимы в условиях постоянного действия на систему управления неопределённых факторов: ограниченных возмущений и погрешностей измерений (в частности, запаздывания в передаче и обработке данных измерений). Развиваются результаты, полученные ранее по исследованию инвариантности систем управления при погрешностях измерений [1] и воспроизведению модельного движения на многошаговом скользящем режиме [2] (результаты, относящиеся к решению первой задачи из далее двух поставленных задач). Исследуются случаи, когда уравнения динамики датчиков неизвестны или не учитываются и суммарные (систематические и случайные [3, 4]) погрешности измерений являются неопределёнными. Объединяются преимущества скользящего режима и многошагового терминального управления при действии неопределённых возмущений. Обеспечивается тождественное, либо с заданной точностью, воспроизведение модельных движений. Рассмотрено применение методов на примере управления агрегированной системой экономических объектов.

Ключевые слова: динамическая система, подвижные многообразия, скользящий режим, многошаговый скользящий режим, многошаговое терминальное управление, неопределённые возмущения, погрешность измерений

1. Постановка задачи.

Рассматривается нелинейная управляемая система

$$\dot{x} = f(x, t) + B(x, t)u + D(x, t)F(t), \quad (1)$$

где $t \in I = (t_0, t_k]$, $t_k < \infty$, $x \in \Omega_x \subset R^n$, $u \in \Omega_u \subset R^m$, $F \in \Omega_F \subset R^l$ и

$$\begin{aligned} f &= f_0(x, t) + \Delta f(x, t), \quad B = B_0(x, t) + \Delta B(x, t), \\ D &= D_0(x, t) + \Delta D(x, t), \quad F = F_0(t) + \Delta F(t). \end{aligned} \quad (2)$$

Номинальные (с индексом «0») и неопределённые (с символом « Δ ») составляющие в суммах (2) содержит в свою очередь слагаемые

$$\begin{aligned} f_0 &= f_0^M + f_0^1 + f_0^2, \quad B_0 = B_0^M + B_0^1, \quad D_0 = D_0^{M1} + D_0^1, \\ \Delta f &= \Delta f^1 + \Delta f^2, \quad \Delta B = \Delta B^1, \quad \Delta D = \Delta D^1 + \Delta D^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Индекс «м» означает здесь совпадение составляющих слагаемого с функциями слагаемых правой части вводимой далее модельной системы, индекс «I» - выполнение условий инвариантности скользящего режима к данной номинальной или неопределённой составляющей, индекс «2» - невыполнение условий инвариантности.

Развивая условия инвариантности [5] на случай подвижного $(n - m)$ - мерного многообразия скольжения

$$S(s = (s_1, \dots, s_m))^T = C(t)x = 0, \quad C - m \times n, \quad (4)$$

получаем их в виде

$$\begin{aligned} f_0^1 &= B_0^M \Lambda_1, \quad B_0^1 = B_0^M \Lambda_2, \quad D_0^{M1} = B_0^M \Lambda_3, \quad D_0^1 = B_0^M \Lambda_4, \\ \Delta f^1 &= B_0^M \Lambda_5, \quad \Delta B^1 = B_0^M \Lambda_6, \quad \Delta D^1 = B_0^M \Lambda_7, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$\Lambda_1 - m \times 1$, $\Lambda_2 - m \times m$, $\Lambda_3 - m \times l$, $\Lambda_4 - m \times l$, $\Lambda_5 - m \times 1$, $\Lambda_6 - m \times m$, $\Lambda_7 - m \times l$ – матрицы функций от x и t ; матрицы $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4$ являются известными, а $\Lambda_5, \Lambda_6, \Lambda_7$ имеют неопределённые ограниченные элементы.

Пусть вектор состояния $x(t)$ системы (1) представляют собой отклонение вектора полного (абсолютного) движения $X(t)$ от программного $X_{np}(t)$

$$x(t) = X(t) - X_{np}(t). \quad (6)$$

В управлении u применяется вычисляемый вектор x_ϵ

$$x_\epsilon = X_\partial - X_{np} = x + \Delta x, \quad (7)$$

где $X_\partial(t)$ – $m \times 1$ - вектор показаний датчиков состояния системы в полных координатах, $X_\partial = X + \Delta X$; $\Delta X = \Delta x$ – вектор погрешностей измерений.

Замечание 1. Если вектор x в системе (1) представляет собой полное движение, то в выражениях (6), (7) полагается $X_{np}(t) \equiv 0$ (так как $X_{np}(t)$ в этом случае учитывается только при формировании управления и желаемого движения $x_M(t) \equiv X_M(t)$, вводимой далее модельной системы).

Тогда получаем

$$x(t) = X(t), \quad x_\epsilon = x + \Delta x = X_\partial = x_\partial, \quad (8)$$

где $x_\partial - n \times 1$ - вектор показаний датчиков состояния системы (1). Это положение относится и к получаемым далее результатам.

Если динамика показаний датчиков является известной, то она может быть представлена дифференциальными уравнениями в форме «вход-выход»

$$(a_{0i}p^{N_i} + a_{1i}p^{N_{i-1}} + \dots + a_{N_i})X_{i\partial} = (b_{1i}p^{N_{i-1}} + \dots + b_{N_i})X_i, \quad (9)$$

где $p \equiv d/dt, i = \overline{1, n}$,

или в нормальном виде [6]

$$\dot{\eta} = G\eta + HX, \quad X_\partial = L\eta + MX, \quad (10)$$

где $X_\partial = x + \Delta x + X_{np}$, $n \times n$ -матрица M является ненулевой при $a_{0i} = 0$ для

хотя бы одного из значений $i = \overline{1, n}$, $\eta - rx1$, $r = \sum_{i=1}^n N_i - d$, d – число нулевых

a_{0i} . В частности, если погрешности измерений вызваны чистым запаздыванием τ_i , имеем уравнение (9) в виде [7]

$$(a_{0i}p^3 + \tau_i^2 p^2 + 6\tau_i p + 12)X_{i\partial} = (\tau_i^2 p^2 - 6\tau_i p + 12)X_i, \quad (11)$$

где $a_{0i} = 0, i = \overline{1, n}$, и в уравнениях (10) $r = 3n - n$, $G - r \times r$ - блочно - диагональная матрица с элементами

$$G_{ii} = \begin{pmatrix} 0 & -12/\tau_i^2 \\ 1 & -6/\tau_i \end{pmatrix}; \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & . & 0 \\ -12/\tau_1 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & -12/\tau_2 & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & . & -12/\tau_n \end{pmatrix} - r \times n;$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1/\tau_1^2 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1/\tau_n^2 \end{pmatrix} - n \times r; \quad M = E - n \times n.$$

Система (1) с уравнениями датчиков (10) для возможности применения ранее разработанных авторами методик представляется как содержащая не два неизвестных вектора (x и η при известном векторе X_∂), а три: x, η и Δx . С этой целью дифференцируем соотношение

$$\Delta x = X_\partial - (x + X_{np}) = L\eta + M(x + X_{np}) - (x + X_{np}),$$

следующее из соотношений (7), (10), и получаем систему:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f + Bu + DF, \\ \dot{\eta} + G\eta + H(x + X_{np}), \\ \Delta \dot{x} &= L(G\eta + Hx + HX_{np}) + (M - E)(f + Bu + DF) + (M - E)\dot{X}_{np}. \end{aligned} \quad (12)$$

Вводятся модельные системы. Для исходной системы (1) модельная система не содержит никаких неопределённых возмущений:

$$\dot{x}_M = f_0^M(x_M, t) + B_0^M(x_M, t)u_M + D_0^{M1}F_0, \quad (13)$$

где оптимальное в каком-либо смысле модельное управление u_M формируется по любому из известных принципов управления.

Для системы (12) модельное движение формируется также с использованием показаний датчиков с уравнениями (9), (10). Тогда для векторов $x_M, \eta_M, \Delta x_M$ получаем модельную систему в виде:

$$\begin{aligned} \dot{x}_M &= f_0^M + B_0^M u_M + D_0^{M1} F_0, \\ \dot{\eta}_M &= G\eta_M + H(x_M + X_{np}), \\ \Delta \dot{x}_M &= L(G\eta_M + Hx_M + HX_{np}) + (M - E)(f_0^M + B_0^M u_M + D_0^{M1} F_0) + \\ &+ (M - E)\dot{X}_{np}. \end{aligned} \quad (14)$$

Формируются подвижные многообразия скольжения. Для системы (1) они формируются с применением только вычисляемого вектора x_ϵ

$$S(s = (s_1, \dots, s_m)^T = C(t)x_\epsilon = 0), \quad C - m \times n. \quad (15)$$

Для системы (12) используются векторы x_ϵ, η и Δx :

$$S(s = (s_1, \dots, s_m)^T = C^1(t)x_g + C^2(t)\eta + C^3(t)\Delta x = 0), \quad (16)$$

где $C^1, C^3 - m \times n$ и $C^2 - m \times r$ - матрицы переменных в общем случае коэффициентов.

Задача 1. Исследовать случай, когда уравнения датчиков не учитываются или неизвестны и погрешности измерений $\Delta x, \Delta \dot{x}$ являются неопределёнными: найти условия инвариантности к неопределённым возмущениям $(\Delta f^1, \Delta B^1, \Delta D^1)$ и к отличиям от модельной системы (f_0^1, B_0^1, D_0^1) скользящих режимов в системе (1) на многообразии S (15); найти методы формирования матрицы $C(t)$ для воспроизведения с начального момента времени $t = t_0$ модельного движения системы (13) с заданной точностью и разрывного управления u , приводящего систему (1) в такой скользящий режим.

Задача 2. Исследовать случай, когда уравнения датчиков известны и учитываются: найти методы формирования матриц $C^i(t)$, $i = \overline{1, 3}$ многообразия S (16) и разрывное управление u для системы (12) такие, чтобы в скользящем режиме с начального момента времени $t = t_0$ тождественно или с заданной точностью воспроизводилось модельное движение системы (14).

Применение разработанных методов управления показывается на решении задачи вывода агрегированной системы экономических объектов (АСЭО) на заданную мощность в условиях постоянного воздействия неопределённых ограниченных возмущений, неопределённых погрешностей измерений и запаздывания в передаче и обработке информации о состоянии системы.

Решение задачи 1.

2. Скользящий режим в условиях неопределённых погрешностей измерений.

Для применения известных методов вывода уравнений скользящего режима на многообразии S (15) в системе (I) предварительно переходим в координаты вектора $x_g = x + \Delta x$:

$$\dot{x}_g = f(x_g - \Delta x, t) + B(x_g - \Delta x, t)U + D(x_g - \Delta x, t)F(t) + \Delta \dot{x}. \quad (17)$$

В системе (17) продолжают выполняться условия инвариантности (5), в которых вектор x заменяется на разность $x_g - \Delta x$. Поэтому в результате применения и развития на случай подвижного многообразия S (15), например, известного метода эквивалентного управления В. И. Уткина [5] получаем систему скользящего режима

$$\begin{aligned} \dot{x}_g = [E - B_0^M (CB_0^M)^{-1} C](f_0^M + f_0^2 + \Delta f^2 + \Delta D^2 F + \Delta x) - \\ - B_0^M (CB_0^M)^{-1} C x_g, \quad x_g \in S, \end{aligned} \quad (18)$$

инвариантную к неопределённостям $\Delta f^1, \Delta B^1, \Delta D^1$ и известным отличиям от модели f_0^1, D_0^1 . В данной системе и далее предполагается, что выполняется обычное для существования скользящего режима условие

$$|C(t)B(x_g - \Delta x, t)| \neq 0 \quad (19)$$

и учитывается соотношение

$$B = B_0^M (E + \Lambda_2 + \Lambda_6), \quad B(CB)^{-1} = B_0^M (CB_0^M)^{-1},$$

где $|E + \Lambda_2 + \Lambda_6| \neq 0$ и $|CB_0^M| \neq 0$ в силу условия (19).

Возвращаясь к системе (18) в координатах вектора x , окончательно получаем систему скользящего режима в виде

$$\dot{x} = [E - B_0^M (CB_0^M)^{-1} C](f_0^M + f_0^2 + \Delta f^2 + \Delta D^2 F) - B_0^M (CB_0^M)^{-1} [\dot{C}(x + \Delta x) + C\Delta \dot{x}], \quad (20)$$

где $x + \Delta x = x_g \in S$ (15) и элементы матриц $B_0^M, \Delta D^2$ и столбцов $f_0^M, f_0^2, \Delta f^2$ являются функциями x, t как и в системе (1).

Из системы (20) непосредственно следует зависимость скользящего режима только от тех неопределённостей $\Delta f^2, \Delta D^2 F$ и известных отличий f_0^2 системы (1) от модели (13), которые не удовлетворяют условиям инвариантности (5) (при $x = x_g - \Delta x$), а также зависимость от неопределённых ошибок измерений $\Delta x, \Delta \dot{x}$.

3. Воспроизведение модельного движения на многошаговом скользящем режиме.

Если бы система скользящего режима (20) не зависела от $f_0^2, \Delta f^2, \Delta D^2 F$ и $\Delta x, \Delta \dot{x}$, то на нём можно было бы тождественно воспроизвести желаемое модельное движение системы (13) с начального момента времени $t = t_0$. Действительно, полагая

$$x_M(t_0) = x(t_0) \quad (21)$$

и приравнявая правые части данных систем, в результате несложных преобразований получаем достаточное условие в виде

$$\dot{C} = -CA(x_M, u_M, F_0, t), \quad (22)$$

где начальное состояние $C(t_0)$ для тождественного воспроизведения с момента времени $t = t_0$ должно удовлетворять равенству

$$C(t_0)x_g(t_0) = 0, \quad x_g(t_0) = x(t_0) + \Delta x(t_0), \quad (23)$$

а $n \times n$ -матрица A является сомножителем в произведении

$$R(x_M, u_M, F_0, t) = Ax_M, \quad (24)$$

где $R = (R_1, \dots, R_n)^T = f_0^M(x_M, t) + B_0^M(x_M, t)(u_M + \Lambda_3(x_M, t)F_0(t))$.

Матрица $A = (A^1, \dots, A^n)$, где A^j её столбцы, допускает произвольное задание $n^2 - n$ элементов. Например, при $A^1 = (R_1, \dots, R_n)^T / x_{M1}$ и $A^j = (0, \dots, 0)^T$, $j = \overline{2, n}$, система mn дифференциальных уравнений (22) преобразуется в систему n уравнений

$$\dot{C}^1 = -CA^1 \quad (25)$$

с постоянными элементами $n \times 1$ -столбцов $C^2 = C^2(t_0), \dots, C^n = C^n(t_0)$ $m \times n$ -матрицы $C = (C^1, \dots, C^n)$, которые вместе с $C^1(t)$ должны удовлетворять условию (23). Для возможности выполнения условия (21) тождественного воспроизведения предполагается, что начальное состояние исходной системы (1) $x(t_0)$ точно известно.

Данный метод построения матрицы $C(t)$ предлагается использовать и при $\Delta f^2 \neq 0$, $\Delta D^2 F \neq 0$, $f_0^2 \neq 0$, $\Delta x \neq 0$, $\Delta \dot{x} \neq 0$, но в многошаговом скользящем режиме, когда матрица $C(t)$ строится заново по системе (22) в начале $t = t_i$ каждого шага $t \in I_i = (t_i, t_{i+1}]$, $i = \overline{0, k-1}$, разбиения рассматриваемого промежутка времени $I = (t_0, t_k]$ при начальных условиях $C(t_i)$, удовлетворяющих равенствам $C(t_i)(x(t_i) + \Delta x(t_i)) = 0$ не только для $i = 0$ (23), но и для $i = \overline{0, k-1}$. Модельное управление u_M в этом случае является многошаговым и строится по модели (13) по известным начальным условиям $x(t_i)$

$$x_M(t_i) = x(t_i), \quad i = \overline{0, k-1}. \quad (26)$$

В частном случае, при заданной конечной точке $x_M(t_k) = x(t_k) = x^*$, управление u_M может быть и терминальным, то есть многошаговым терминальным управлением (МТУ) [8].

Покажем, что такой метод управления позволяет при относительно малых шагах I_i обеспечивать заданную точность воспроизведения модельного движения с начального момента времени $t = t_0$. Представим модельную систему (13) как систему скользящего режима на многообразии $S(s = C(t)x_M = 0)$. При нахождении матрицы $C(t)$ с начала $t = t_i$ каждого шага по системе (22) имеем равенство $\dot{C}x_M = -CAx_M = R$, откуда следует, что

$$u_M = -(CB_0^M)^{-1}(Cf_0^M + CD_0^{M1}F_0 - \dot{C}x_M).$$

Подставляя данное выражение u_M в правую часть модельной системы (13), получаем систему скользящего режима

$$\dot{x}_M = [E - B_0^M (CB_0^M)^{-1} C]f_0^M - B_0^M (CB_0^M)^{-1} \dot{C}x_M, \quad (27)$$

где $t \in I_i$, $x_M \in S(s = C(t)x_M(t) = 0) \forall t \in I_i$, выполняется условия (26) и элементы матрицы B_0^M и столбца f_0^M являются функциями x_M, t . Представляя в системе скользящего режима (20) вектор x в виде суммы $x = x_M + Z$ и вычитая модельную систему (27) из системы (20), получаем на каждом шаге I_i систему в отклонениях Z от модельного движения: (28)

$$\dot{Z} = (\varphi(x_M + Z, t) - \varphi(x_M, t)) + (E - B_0^M (x_M + Z, t)(CB_0^M)^{-1} C)(f_0^2(x_M + Z, t) + \Delta f_2^2(x_M + Z, t) + \Delta D^2(x_M + Z, t)F) - B_0^M (CB_0^M)^{-1}(\dot{C}\Delta x + C\Delta \dot{x}),$$

где

$$\varphi(x_M + Z, t) = [E - B_0^M (CB_0^M)^{-1} C]f_0^M(x_M + Z, t) - B_0^M (CB_0^M)^{-1} \times \dot{C}(x_M + Z).$$

Учитывая ограниченность по норме векторов $x_M(t)$, нулевые начальные условия $Z(t_i) = 0$ и применяя лемму Гронуолла-Беллмана к интегральной форме записи системы (28), приходим при достаточно малых длинах шагов I_i и норм

начальных условий $C(t_i)$ в системах (22), (25) к выводу о возможности выполнения ограничений $\|Z(t)\| \leq \varepsilon \forall t \in I_i, i = \overline{0, k-1}$, при заданной точности ε воспроизведения модельного движения.

Отметим, что в данном методе многошагового скользящего режима точная информация о векторе $X(t)$ требуется уже не только в момент $t = t_0$, но и в начале $t = t_i$ всех k шагов построения управления.

4. Построение разрывного управления с неопределёнными погрешностями измерений.

Для приведения системы (17), а с ней и системы (1), в скользящий режим на многообразии S (15) разрывное управление u представим в виде суммы

$$u = u_0 + u_\Delta, \quad (29)$$

где u_0 решает задачу при отсутствии неопределённых возмущений $\Delta f, \Delta B, \Delta D, \Delta F$ и неопределённых ошибок измерений $\Delta x, \Delta \dot{x}$, а составляющая u_Δ подавляя их влияние соответственно в случаях их противодействия или способствования процессу приведения. В построении управления используются: разложение производной $\dot{s}$, определяемой в силу системы (17), в виде суммы [9]

$$\dot{s} = (\dot{s}_1, \dots, \dot{s}_m)^T = \dot{s}_0 + \dot{s}_\Delta, \quad \dot{s}_i = \dot{s}_{0i} + \dot{s}_{\Delta i}, \quad i = \overline{1, m}; \quad (30)$$

необходимые и достаточные условия существования скользящего режима на каждой из подвижных гиперплоскостей $S_i (s_i = c_i(t)x_\varepsilon = 0)$

$$\lim_{s_i \rightarrow +0} \dot{s}_i < 0, \quad \lim_{s_i \rightarrow -0} \dot{s}_i > 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (31)$$

где $C_i(t)$ - i -я строка матрицы $C(t)$; достаточные условия попадания фазовых траекторий на эти гиперплоскости S_i

$$\dot{s}_{\Delta i} s_i < 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (32)$$

Для выделения слагаемых $\dot{s}_0$ и $\dot{s}_\Delta$ запишем систему (17) в виде

$$\dot{x}_\varepsilon = (f_0 + \Delta f) + B_0^M (E + \Lambda_2 + \Lambda_6)u + (D_0 + \Delta D)(F_0 + \Delta F) + \Delta \dot{x}, \quad (33)$$

где $m \times m$ - матрица Λ_6 содержит неопределённые ограниченные элементы $\Lambda_{ij6} = \Lambda_{ij6}(x_\varepsilon - \Delta x, t)$, и разложим в ряды Тейлора относительно $x_\varepsilon(t)$ по степеням составляющих Δx_i вектора ошибок измерений Δx вектор $f_0(x, t)$ и матрицы $B_0^M(x, t), D_0(x, t), x = x_\varepsilon - \Delta x$:

$$\begin{aligned} f_0 &= f_0(x_\varepsilon, t) + a_f(x_\varepsilon, t)\Delta x + R_1; B_0^M = B_0^M(x_\varepsilon, t) + a_B(x_\varepsilon, \Delta x, t) + R_2; \\ B_0^M(E + \Lambda_2) &= B_0^M(x_\varepsilon, t)(E + \Lambda_2(x_\varepsilon, t)) + a_{BE}(x_\varepsilon, \Delta x, t) + R_3; \\ D_0 &= D_0(x_\varepsilon, t) + a_D(x_\varepsilon, \Delta x, t) + R_4, \end{aligned} \quad (34)$$

где $n \times n, n \times m, n \times m$ и $n \times 1$ -матрицы a_f, a_B, a_{BE} и a_D

$$a_f = -\frac{\mathcal{F}_0(x,t)}{\partial x}, \quad a_B = (a_B^1 \Delta x, \dots, a_B^m \Delta x), \quad a_B^i = -\frac{\partial (B_0^M)^i}{\partial x},$$

$$a_{BE} = (a_{BE}^1 \Delta x, \dots, a_{BE}^m \Delta x), \quad a_{BE}^i = -\frac{\partial (B_0^M (E + \Lambda_2))^i}{\partial x},$$

$$a_D = (a_D^1 \Delta x, \dots, a_D^l \Delta x), \quad a_D^j = -\frac{\partial \mathcal{D}_0^j(x,t)}{\partial x},$$

определяются при $x = x_\varepsilon(t)$; $(B_0^M)^i$; $(B_0^M (E + \Lambda_2))^i$ и D_0^i - столбцы матриц B_0^M , $(B_0^M (E + \Lambda_2))$ и D_0 , R_k - матрицы остаточных членов рядов, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, l}$, $k = \overline{1, 4}$. Полагая малыми составляющие Δx_i , $i = \overline{1, n}$, вектора ошибок измерений Δx и неопределённые возмущения Λ_{kr6} , $k, r = \overline{1, m}$, ΔD_{ij} , ΔF_j , $j = \overline{1, l}$, в матрицах $\Lambda_6, \Delta D$ и столбце ΔF и отбрасывая их произведения $\Delta x_i \Delta F_j$, $\Delta x_i \Lambda_{kr6}$, $\Delta D_{ij} \Delta F_j$ вместе с остаточными членами R_i получаем в силу системы (33) производные $\dot{s}_0, \dot{s}_\Delta$:

$$\dot{s}_0 = \dot{C}x_\varepsilon + Cf_0(x_\varepsilon, t) + CD_0(x_\varepsilon, t)F_0 + CB_0^M(x_\varepsilon, t)(E + \Lambda_2(x_\varepsilon, t))u_0, \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \dot{s}_\Delta = & [Ca_f \Delta x]_0 + [C\Delta f]_1 + [CD_0 \Delta F]_2 + [Ca_D F_0]_3 + [(C\Delta D)F_0]_4 + \\ & + [Ca_{BE} u_0]_5 + [CB_0^M \Lambda_6 u_0]_6 + [C\Delta \dot{x}]_7 + [Ca_{BE} + CB_0^M \Lambda_6]_8 u_\Delta + \\ & + CB_0^M [E + \Lambda_2] u_\Delta. \end{aligned} \quad (36)$$

Согласно методике, изложенной в работе [10], для определения u_0 полагаем $\dot{s}_0$ равным сумме

$$\dot{s}_0 = \kappa_g g + \kappa_s s, \quad (37)$$

где $\kappa_g = \text{diag}\{\kappa_{g1}, \dots, \kappa_{gm}\}$, $\kappa_s = \text{diag}\{\kappa_{s1}, \dots, \kappa_{sm}\}$, $g = (g_1, \dots, g_m)^T$,

$g_j = d_j^T(t)x_\varepsilon$ - вспомогательные функции переключения, $d_j^T = (d_{j1}, \dots, d_{jn})$;

κ_{gi} и κ_{si} - разрывные коэффициенты

$$\kappa_{gi} = \begin{cases} \kappa_{gi}^+(x_\varepsilon, t) < 0 & \text{при } s_i g_i > 0, \\ \kappa_{gi}^-(x_\varepsilon, t) > 0 & \text{при } s_i g_i \leq 0, \end{cases} \quad (38)$$

$$\kappa_{si} = \begin{cases} \kappa_{si}^+(x_\varepsilon, t) < 0 & \text{при } s_i g_i > 0, \\ \kappa_{si}^-(x_\varepsilon, t) < 0 & \text{при } s_i g_i \leq 0. \end{cases}$$

Так как в силу условий $|CB| \neq 0, |CB_0^M| \neq 0$ (19) выполняется и условие

$$|E + \Lambda_2(x_\varepsilon, t)| \neq 0, \quad (39)$$

то с учётом выражений $\dot{s}_0$ (35), (37) получаем

$$u_0 = (u_{01}, \dots, u_{0m})^T = (CB_0^M(x_\varepsilon, t)(E + \Lambda_2(x_\varepsilon, t)))^{-1} \times \\ \times [\kappa_g g + \kappa_s s - (Cf_0(x_\varepsilon, t) + \dot{C}x_\varepsilon + CD_0(x_\varepsilon, t)F_0)], \quad (40)$$

где K_{gi}, K_{si} удовлетворяют неравенствам (38).

Построение управления $u_\Delta = (u_{\Delta 1}, \dots, u_{\Delta m})^T$ может осуществляться с различной степенью детализации и, соответственно, сложности аппаратной реализации и выполнения ограничений на управление u .

По числу слагаемых $[\cdot]_0, [\cdot]_1, \dots, [\cdot]_8$, выделенных в выражении $\dot{s}_\Delta$ (36) и подлежащих компенсации (подавлению), структуру u_Δ можно задать в виде

$$u_\Delta = (CB_0^M(E + \Lambda_2))^{-1} \sum_{j=0}^8 u_\Delta^j, \quad u_\Delta^j = (u_{\Delta 1}^j, \dots, u_{\Delta m}^j)^T. \quad (41)$$

Тогда вводя обозначение

$$[\cdot]_8 [CB_0^M(E + \Lambda_2)]^{-1} = N(\Delta x, \Lambda_6), \quad (42)$$

где N – $m \times n$ – матрица, получаем, что составляющие u_Δ^j управления u_Δ (41) входят в производную $\dot{s}_\Delta$ (36) в виде суммы:

$$(E + N(\Delta x, \Lambda_6)) \sum_{j=0}^8 u_\Delta^j. \quad (43)$$

Раскрывая в производной $\dot{s}_\Delta$ (36) матрицы $[\cdot]_j, j = \overline{0,8}$, по i -м строкам и распределяя составляющие u_Δ^j в управлениях u_Δ^j по соответствующим возмущениям, получаем выражение для $\dot{s}_{\Delta i}$:

$$\begin{aligned} \dot{s}_{\Delta i} = & \left\{ \sum_{r=1}^n c_i a_f^r \Delta x_r + (1 + N_{ii}) u_{\Delta i}^0 \right\}_0 + \left\{ \sum_{r=1}^n c_{ir} \Delta f_r + (1 + N_{ii}) u_{\Delta i}^1 \right\}_1 + \\ & + \left\{ \sum_{r=1}^n c_i D_0^r \Delta F_r + (1 + N_{ii}) u_{\Delta i}^2 \right\}_2 + \left\{ \sum_{r=1}^n p_{ir}(t) \Delta x_r + (1 + N_{ii}) u_{\Delta i}^3 \right\}_3 + \\ & + \left\{ \sum_{j=1}^l c_i \Delta D^j F_{0j} + (1 + N_{ii}) u_{\Delta i}^4 \right\}_4 + \left\{ \sum_{r=1}^n q_{ir}(t) \Delta x_r + (1 + N_{ii}) u_{\Delta i}^5 \right\}_5 + \\ & + \left\{ \sum_{j=1}^{m^2} b_{ij}(t) \lambda_{j6} + (1 + N_{ii}) u_{\Delta i}^6 \right\}_6 + \left\{ \sum_{r=1}^n c_{ir}(t) \Delta \dot{x}_r + (1 + N_{ii}) u_{\Delta i}^7 \right\}_7 + \\ & + \left\{ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m N_{ij} (u_{\Delta j}^0 + u_{\Delta j}^1 + \dots + u_{\Delta j}^8) + (1 + N_{ii}) u_{\Delta i}^8 \right\}, \end{aligned} \quad (44)$$

где c_i и c_{ir} – i -е строки и r -е их элементы матрицы C ; D_0^r – r - столбцы матрицы D_0 ; $p_{ir}(t)$ и $q_{ir}(t)$ – переменные коэффициенты при Δx_r в i -х строках

матриц $[\cdot]_3$ и $[\cdot]_5$; $b_{ij}(t)$ - коэффициенты при составляющих $\lambda_{j6}, j = \overline{1, m^2}$, матрицы Λ_6 , записанных, например, по строкам

$$(\lambda_{1,6}, \dots, \lambda_{m^2,6}) = (\Lambda_{11}, \dots, \Lambda_{1b}; \Lambda_{21}, \dots, \Lambda_{2m}; \dots; \Lambda_{m1}, \dots, \Lambda_{mn});$$

N_{ii} и $N_{ij}, j \neq i$, - элементы матрицы $N(\Delta x, \Lambda_6)$ (42).

Условия попадания $\dot{s}_{\Delta i} s_i < 0$ (32) начинают выполняться, например, при

$$u_{\Delta i}^0 = \sum_{r=1}^n u_{\Delta ir}^0, \quad u_{\Delta ir}^0 = \kappa_{ir}^0 c_i a_f^r, \quad (45)$$

где

$$\begin{aligned} \text{sign}(1 + N_{ii}(\Delta x, \Lambda_6)) \kappa_{ir}^{0+} &< \inf_{\Delta x, \Lambda_6} (-\Delta x_r / |1 + N_{ii}|) \quad \text{нпу} \quad s_i c_i a_f^r > 0, \\ \text{sign}(1 + N_{ii}(\Delta x, \Lambda_6)) \kappa_{ir}^{0-} &> \sup_{\Delta x, \Lambda_6} (-\Delta x_r / |1 + N_{ii}|) \quad \text{нпу} \quad s_i c_i a_f^r \leq 0; \end{aligned}$$

$$u_{\Delta i}^1 = \sum_{r=1}^n u_{\Delta ir}^1, \quad u_{\Delta ir}^1 = \kappa_{ir}^1 c_{ir}, \quad (46)$$

где

$$\text{sign}(1 + N_{ii}) \kappa_{ir}^{1+} \begin{cases} < \inf_{\Delta x, \Lambda_6, \Delta f_r} (-\Delta f_r / |1 + N_{ii}|) \quad \text{нпу} \quad s_i c_{ir} > 0, \\ > \sup_{\Delta x, \Lambda_6, \Delta f_r} (-\Delta f_r / |1 + N_{ii}|) \quad \text{нпу} \quad s_i c_{ir} \leq 0; \end{cases}$$

$$u_{\Delta i}^2 = \sum_{r=1}^n u_{\Delta ir}^2, \quad u_{\Delta ir}^2 = \kappa_{ir}^2 c_i D_0^r, \quad (47)$$

где

$$\text{sign}(1 + N_{ii}) \kappa_{ir}^{2+} \begin{cases} < \inf_{\Delta x, \Lambda_6, \Delta F_r} (-\Delta F_r / |1 + N_{ii}|) \quad \text{нпу} \quad s_i c_i D_0^r > 0, \\ > \sup_{\Delta x, \Lambda_6, \Delta F_r} (-\Delta F_r / |1 + N_{ii}|) \quad \text{нпу} \quad s_i c_i D_0^r \leq 0; \end{cases}$$

$$u_{\Delta i}^3 = \sum_{r=1}^n u_{\Delta ir}^3, \quad u_{\Delta ir}^3 = \kappa_{ir}^3 p_{ir}(t), \quad (48)$$

где

$$\text{sign}(1 + N_{ii}) \kappa_{ir}^{3+} \begin{cases} < \inf_{\Delta x, \Lambda_6} (-\Delta x_r / |1 + N_{ii}|) \quad \text{нпу} \quad s_i p_{ir}(t) > 0, \\ > \sup_{\Delta x, \Lambda_6} (-\Delta x_r / |1 + N_{ii}|) \quad \text{нпу} \quad s_i p_{ir}(t) \leq 0; \end{cases}$$

$$u_{\Delta i}^4 = \sum_{j=1}^l u_{\Delta ij}^4, \quad u_{\Delta ij}^4 = \sum_{k=1}^n u_{\Delta ijk}^4, \quad u_{\Delta ijk}^4 = \kappa_{ijk}^4 C_{ik} F_{0j}, \quad (49)$$

где

$$\begin{aligned} \text{sign}(1 + N_{ii})\kappa_{ijk}^{4+} & \begin{cases} < \inf_{\Delta D_{kj}, \Delta x, \Lambda_6} (-\Delta D_{kj} / |1 + N_{ii}|) & \text{npu} \quad s_i c_{ik} F_{0j} > 0, \\ > \sup_{\Delta D_{kj}, \Delta x, \Lambda_6} (-\Delta D_{kj} / |1 + N_{ii}|) & \text{npu} \quad s_i c_{ik} F_{0j} \leq 0; \end{cases} \\ u_{\Delta i}^5 &= \sum_{r=1}^n u_{\Delta ir}^5, \quad u_{\Delta ir}^5 = \kappa_{ir}^5 q_{ir}(t), \end{aligned} \quad (50)$$

где

$$\begin{aligned} \text{sign}(1 + N_{ii})\kappa_{ir}^{5+} & \begin{cases} < \inf_{\Delta x, \Lambda_6} (-\Delta x_r / |1 + N_{ii}|) & \text{npu} \quad s_i q_{ir}(t) > 0, \\ > \sup_{\Delta x, \Lambda_6} (-\Delta x_r / |1 + N_{ii}|) & \text{npu} \quad s_i q_{ir}(t) \leq 0; \end{cases} \\ u_{\Delta i}^6 &= \sum_{j=1}^{m^2} u_{\Delta ij}^6, \quad u_{\Delta ij}^6 = \kappa_{ij}^6 b_{ij}(t), \end{aligned} \quad (51)$$

где

$$\begin{aligned} \text{sign}(1 + N_{ii})\kappa_{ir}^{6+} & \begin{cases} < \inf_{\lambda_{j6}, \Delta x, \Lambda_6} (-\lambda_{j6} / |1 + N_{ii}|) & \text{npu} \quad s_i b_{ij} > 0, \\ > \sup_{\lambda_{j6}, \Delta x, \Lambda_6} (-\lambda_{j6} / |1 + N_{ii}|) & \text{npu} \quad s_i b_{ij} \leq 0; \end{cases} \\ u_{\Delta i}^7 &= \sum_{r=1}^n u_{\Delta ir}^7, \quad u_{\Delta ir}^7 = \kappa_{ir}^7 c_{ir}(t); \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \text{sign}(1 + N_{ii})\kappa_{ir}^{7+} & \begin{cases} < \inf_{\Delta \dot{x}_r, \Delta x, \Lambda_6} (-\Delta \dot{x}_r / |1 + N_{ii}|) & \text{npu} \quad s_i c_{ir}(t) > 0, \\ > \sup_{\Delta \dot{x}_r, \Delta x, \Lambda_6} (-\Delta \dot{x}_r / |1 + N_{ii}|) & \text{npu} \quad s_i c_{ir}(t) \leq 0; \end{cases} \\ u_{\Delta i}^8 &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m u_{\Delta ij}^8, \quad u_{\Delta ij}^8 = \kappa_{ij}^8 (u_{\Delta j}^0 + u_{\Delta j}^1 + \dots + u_{\Delta j}^8); \end{aligned} \quad (52)$$

где

$$\text{sign}(1 + N_{ii})\kappa_{ij}^{8+} \begin{cases} < \inf_{\Delta x, \Lambda_6} (-N_{ij} / |1 + N_{ii}|) & \text{npu} \quad s_i (U_{\Delta j}^0 + \dots + U_{\Delta j}^8) > 0, \\ > \sup_{\Delta x, \Lambda_6} (-N_{ij} / |1 + N_{ii}|) & \text{npu} \quad s_i (U_{\Delta j}^0 + \dots + U_{\Delta j}^8) \leq 0. \end{cases}$$

Отметим, что для нахождения m управлений $u_{\Delta i}^8$ образуются системы по m линейных алгебраических уравнений

$$u_{\Delta i}^8 = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m u_{\Delta ij}^8 = \kappa_{i1}^8 (u_{\Delta 1}^0 + u_{\Delta 1}^1 + \dots + u_{\Delta 1}^8) + \dots + \kappa_{i,i-1}^8 \times \\ \times (U_{\Delta,i-1}^0 + U_{\Delta,i-1}^1 + \dots + U_{\Delta,i-1}^8) + \kappa_{i,i+1}^8 (U_{\Delta,i+1}^0 + U_{\Delta,i+1}^1 + \dots + U_{\Delta,i+1}^8) + \dots + (53) \\ + \kappa_{i,m}^8 (U_{\Delta,m}^0 + U_{\Delta,m}^1 + \dots + U_{\Delta,m}^8), \quad i = \overline{1, m},$$

с $m(m-1)$ разрывными коэффициентами $\kappa_{i1}^{8+}, \dots, \kappa_{i,i-1}^{8+}, \kappa_{i,i+1}^{8+}, \dots, \kappa_{i,m}^{8+}, \quad i = \overline{1, m}$.

Для каждой из $2^{m(m-1)}$ комбинаций индексов «+», «-» этих коэффициентов образуется своя система (53). При цифровой реализации разрывного управления необходимо в реальном масштабе времени решать системы (53) до тех пор, пока для одной из комбинаций индексов «+», «-» в κ_{ij}^{8+} (52) не станут соответствовать знаки произведений $s_i (u_{\Delta j}^0 + u_{\Delta j}^1 + \dots + u_{\Delta j}^8)$ (52). Такой объём необходимых расчётов обусловлен тем, что матрица $N(\Delta x, \Lambda_6)$ (42) не диагональная. Более просто система (53) решается при аналоговой реализации: для любой текущей комбинации индексов «+», «-» в разрывных коэффициентах κ_{ij}^{8+} все управления $u_{\Delta i}^8$ находятся в реальном масштабе времени (и практически мгновенно).

Замечание 2. При $m=1$ составляющих N_{ij} в производной $\dot{s}_{\Delta i}$ (44) нет и, следовательно, $u_{\Delta}^8 = u_{\Delta 1}^8 = 0$.

Замечание 3. Для компенсации возможного неблагоприятного влияния на процесс приведения в скользящий режим отброшенных в производной $\dot{s}_{\Delta}$ (36) произведений малых неопределённостей и остаточных членов R_i при малых по модулю значениях разрывных коэффициентов κ в u_0 и u_{Δ} предлагается в разрывное управление u ввести релейную добавку

$$u = u_0 + u_p + u_{\Delta}, \quad (54)$$

которая может быть найдена, например, из условия

$$\dot{s}_0 = \kappa_g g + \kappa_s s + \delta \operatorname{sign} s, \quad (55)$$

где

$$\delta = \operatorname{diag}\{\delta_1, \dots, \delta_m\}, \quad \delta_i < 0, \quad \operatorname{sign} s = (\operatorname{sign} s_1, \dots, \operatorname{sign} s_m)^T, \quad i = \overline{1, m},$$

и выполняются неравенства

$$(\delta_i \operatorname{sign} s_i) s_i < 0 \quad \text{при} \quad s_i \neq 0, \quad i = \overline{1, m},$$

аналогичные «условиям попадания» (32). Тогда в силу производной $\dot{s}_0$ (35) с учётом u (54)

$$\dot{s}_0 = \dot{C}x_g + Cf_0(x_g, t) + CD_0(x_g, t)F_0 + CB_0^M(x_g, t)(E + \Lambda_2(x_g, t))(u_0 + u_p)$$

и согласно условию (55) получаем, что

$$u_p = (u_{p1}, \dots, u_{pm})^T = (CB_0^M(x_g, t)(E + \Lambda_2(x_g, t)))^{-1} \delta \operatorname{sign} s. \quad (56)$$

В выражениях скобок $[\cdot]_5$, $[\cdot]_6$ и коэффициентов $q_{ir}(t)$ и $b_{ij}(t)$ управлений $u_{\Delta i}^5$ (50) и $u_{\Delta i}^6$ (51), зависящих от u_0 , необходимо в этом случае подставить не u_0 , а сумму $u_0 + u_p$, где u_0 и u_p определяется по формулам (40) и (56).

Решение задачи 2.

5. Формирование подвижного многообразия скольжения.

Уравнения скользящего режима в системе (12) на многообразии S (16) согласно методике раздела 2 предварительно находятся в координатах $x_\theta, \eta, \Delta x$, а уж затем в $x, \eta, \Delta x$. Предполагается, что выполняется условие существования скользящего режима и разрывного управления, решающего задачу 2:

$$\left| (C^1(t, M + C^3(t)(M - E))B_0^M(x, t)) \right| \neq 0 \forall x \in \Omega_x, \quad t \in I. \quad (57)$$

Учитывая соотношения (19) и то, что

$$B[(C^1M + C^3(M - E))B]^{-1} = B_0^M(E + \Lambda_2 + \Lambda_6)[C^1M + C^3(M - E)] \times \\ \times B_0^M(E + \Lambda_2 + \Lambda_6)]^{-1} = B_0^M[(C^1M + C^3(M - E))B_0^M]^{-1}, \quad (58)$$

уравнения скользящего режима получаем в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \{\cdot\}_1, \\ \dot{\eta} &= G\eta + H(x + X_{np}), \\ \Delta \dot{x} &= L[G\eta + H(x + X_{np})] + (M - E)\dot{X}_{np} + (M - E)\{\cdot\}_1, \end{aligned} \quad (59)$$

где

$$\begin{aligned} \{\cdot\}_1 &= \{E - B_0^M[(C^1M + C^3(M - E))B_0^M]^{-1}(C^1M + C^3(M - E))\}(f_0^M + \\ &+ f_0^2 + \Delta f^2 + \Delta D^2F) - B_0^M[(C^1M + C^3(M - E))B_0^M]^{-1}\{\dot{C}^1(x + \Delta x) + C^1 \times \\ &\times [L(G\eta + Hx + HX_{np}) + (M - E)\dot{X}_{np}] + \dot{C}^2\eta + C^2[G\eta + Hx + HX_{np}] + \\ &+ \dot{C}^3\Delta x + C^3[L(G\eta + Hx + HX_{np}) + (M - E)\dot{X}_{np}]\} \end{aligned}$$

и

$$s = C^1(t)(x + \Delta x) + C^2(t)\eta + C^3(t)\Delta x = 0,$$

или

$$y_\theta = (x_\theta^T, \eta^T, \Delta x^T)^T \in S(16). \quad (60)$$

Так как в системе (12) выполняются условия инвариантности (5), то система (59) от неопределённых возмущений $\Delta f^1, \Delta B^1, \Delta D^1$ и отличий f_0^1, D_0^1F системы (12) от модели (14) не зависит.

Для тождественного воспроизведения в скользящем режиме (59) при $f_0^2 \equiv (0, \dots, 0)^T, \Delta f^2 \equiv (0, \dots, 0)^T, \Delta D^2 \equiv 0 - n \times l$ модельного движения системы (14) получаем, согласно схеме доказательства, приведённой в разделе 3, следующие достаточные условия:

$$x_M(t_0) = x(t_0), \quad \eta_M(t_0) = \eta(t_0), \quad \Delta x_M(t_0) = \Delta x(t_0) \quad (61)$$

и

$$\dot{C} = -CA(x_M, \eta_M, X_{np}, \dot{X}_{np}, u_M, F_0, t), \quad (62)$$

где $C = (C^1, C^2, C^3)$ – $m \times q$, а $q \times q$ – матрица A является сомножителем в произведении

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ r_q \end{pmatrix} = Ay_{M\theta}, \quad (63)$$

где

$$y_{M\theta} = (\lambda_{M\theta}^T, \eta_M^T, \Delta x_M^T)^T - q \times 1, \quad q = 2n + r, \quad R - q \times 1, \quad R_1 - n \times 1, \quad R_2 - r \times 1,$$

$$R_3 - n \times 1, \quad x_{M\theta} = x_M + \Delta x_M, \quad R_1 = Mf_0^M + L(G\eta_M + Hx_M + HX_{np}) + \\ + (M - E)\dot{X}_{np} + MB_0^M(u_M + \Lambda_3 F_0), \quad R_2 = G\eta_M + Hx_M + HX_{np},$$

$$R_3 = L(G\eta_M + Hx_M + HX_{np}) + (M - E)[\dot{X}_{np} + f_0^M + B_0^M(u_M + \Lambda_3 F_0)];$$

начальные условия $C(t_0)$ в системе (62) удовлетворяют условию прохождения многообразия $S(16)$ в момент $t = t_0$ через начальное состояние системы (12)

$$y(t_0) = (x^T(t_0), \eta^T(t_0), \Delta x^T(t_0))^T :$$

$$y_\theta(t_0) \in S(16), \quad \text{или} \quad s(t_0) = C_1(t_0)(x(t_0) + \Delta x(t_0)) + C_2(t_0)\eta(t_0) + \\ + C_3(t_0)\Delta x(t_0) = 0, \quad (64)$$

чем обеспечивается тождественное воспроизведение с начального момента времени $t = t_0$.

При задании $(q^2 - q)$ элементов матрицы A нулевыми, например,

$$A = (A_{qx1}^1, 0_{qx1}, \dots, 0_{qx1}), \quad A^j = 0_{qx1}, \quad j = \overline{2, q}, \quad (65)$$

и столбца A^1 равными согласно произведению (63)

$$A^1 = (r_1 / x_{M\theta 1}, \dots, r_q / x_{M\theta 1})^T, \quad x_{M\theta 1} = x_{M1} + \Delta x_{M1}, \quad (66)$$

порядок системы (62) понижается в m раз - от qm до q :

$$\dot{C}^{11} = -CA^1, \quad (67)$$

где C^{11} первый столбец в матрице $C^1 = (C^{11}, \dots, C^{1n})$, а столбцы $C^{12}, \dots, C^{1n}$ и матрицы C^2, C^3 являются постоянными

$$C^{1j} = C^{1j}(t_0), \quad j = \overline{2, n}; \quad C^2 = C^2(t_0), C^3 = C^3(t_0)$$

и вместе со столбцом $C^{11}(t)$ должны удовлетворять условию (64).

Замечание 4. В частном случае $S(16)$, при

$$S(s = C^1(t)x_\theta = 0),$$

система (62) преобразуется к системе

$$\dot{C}^1 = -C^1 A(x_M, \eta_M, X_{np}, \dot{X}_{np}, u_M, F_0, t),$$

где $n \times n$ - матрица A является сомножителем в произведении

$$R_1 = (r_1, \dots, r_n)^T = A x_{M\delta},$$

где

$$R_1 = M f_0^M + L(G\eta + Hx + HX_{np}) + (M - E)\dot{X}_{np} + MB_0^M(U_M + \Lambda_3 F_0).$$

При $A = (A^1, \dots, A^n)$, $A^j = 0$, $j = \overline{2, n}$, и $A^1 = (r_1 / x_{M\delta 1}, \dots, r_m / x_{M\delta 1})^T$ получаем систему

$$\dot{C}^{11} = -C^1 A^1,$$

где C^{11} - первый столбец в матрице $C^1 = (C^{11}, \dots, C^{1n})$, а столбцы $C^{12}, \dots, C^{1n}$ являются постоянными

$$C^{1j} = C^{1j}(t_0), \quad j = \overline{2, n}.$$

Условие (64) преобразуется к виду

$$x(t_0) \in S(s = C^1(t_0)x_\delta(t_0) = 0) : C^1(t_0)(x(t_0) + \Delta x(t_0)) = 0.$$

Векторы $x(t_0)$, $\eta(t_0)$, $\Delta x(t_0)$ в условии (61) вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} x(t_0) &= X(t_0) - X_{np}(t_0); \\ \eta(t_0) &= \eta(X_\delta(t_0), \dots, X_\delta^{(N_m-1)}(t_0); X(t_0), \dots, X^{(N_m-2)}(t_0)); \\ \Delta x(t_0) &= X_\delta(t_0) - X(t_0), \end{aligned} \quad (68)$$

где $N_m = \max_i \{N_i\}$, $i = \overline{1, n}$, а $X(t_0)$, $X_\delta(t_0)$ и производные от X_δ и X для момента времени $t = t_0$ могут быть определены заблаговременно, в стационарных условиях.

При неточном выполнении условий (61), (64) требуются дополнительные исследования по качеству воспроизведения.

6. Многошаговый скользящий режим.

Применяется, как и в разделе 3, для воспроизведения желаемого модельного движения с заданной точностью в том случае, когда отличия от модели f_0^2 и неопределённости Δf^2 , $\Delta D^2 F$, которые не удовлетворяют условиям инвариантности (5), не равны тождественно нулевым столбцам. Для того, чтобы показать такую возможность при достаточно малых шагах $I_i = (t_i, t_{i+1}]$ разбиения исходного промежутка I модельное движение системы (14) представим как скользящий режим на многообразии

$$\begin{aligned} S(s = C(t)y_{M\delta} = 0), C = (C^1, C^2, C^3), y_{M\delta} = (x_{M\delta}^T, \eta_M^T, \Delta x_M^T)^T : \\ \dot{x}_M = \{\cdot\}_{M1}, \\ \dot{\eta}_M = G\eta_M + H(x_M + X_{np}), \\ \Delta \dot{x}_M = L[G\eta_M + H(x_M + X_{np})] + (M - E)\dot{X}_{np} + (M - E)\{\cdot\}_{M1}, \end{aligned} \quad (69)$$

где

$$\{\cdot\}_{M1} = \{E - B_0^M [(C^1 M + C^3 (M - E)) B_0^M]^{-1} (C^1 M + C^3 (M - E))\} f_0^M - \\ - B_0^M [(C^1 M + C^3 (M - E)) B_0^M]^{-1} \{\dot{C}^1 (x_M + \Delta x_M) + C^1 [L(G\eta_M + Hx_M + \\ + HX_{np}) + (M - E)\dot{X}_{np}] + \dot{C}^2 \eta_M + C^2 [G\eta_M + Hx_M + HX_{np}] + \dot{C}^3 \Delta x + \\ + C^3 [L(G\eta_M + Hx_M + HX_{np}) + (M - E)\dot{X}_{np}]\}, y_{M6} \in S; \quad t \in I_i = (t_i, t_{i+1}], \\ i = \overline{0, k-1}; \quad x_{M6} = x_M + \Delta x_M = X_{\partial M} - X_{np}.$$

Многообразие скольжения S (16) для системы (12) строится в начале $t = t_i$ каждого шага I_i заново по системе уравнений (62) или (67) при начальных условиях

$$C(t_i) y_{\varepsilon}(t_i) = 0, \quad y_{\varepsilon}(t_i) = y(t_i) + \Delta y(t_i), \quad i = \overline{0, k-1}. \quad (70)$$

Равенство начальных условий в модельной (14), (69) и реальной (12), (59) системах также должно выполняться для каждого момента времени $t = t_i$:

$$x_M(t_i) = x(t_i); \quad \eta_M(t_i) = \eta(t_i); \quad \Delta x_M(t_i) = \Delta x(t_i). \quad (71)$$

Данные условия означают, что помимо вычислений (68) для момента $t = t_0$ понадобятся вычисления и для $t = t_i, \quad i = \overline{1, k-1}$:

$$x(t_i) = X(t_i) - X_{np}(t_i), \quad \eta(t_i) = \eta(X_{\partial}(t_i), \dots, X_{\partial}^{(N_m-1)}(t_i); \\ X(t_i), \dots, X^{(N_m-1)}(t_i)), \quad \Delta x(t_i) = X_g(t_i) - X(t_i), \quad i = \overline{0, k-1}. \quad (72)$$

Схема доказательства возможности обеспечения заданной точности ε воспроизведения модельного движения совпадает с изложенной в разделе 3: вводятся обозначения $x = x_M + z^1$, $\eta = \eta_M + z^2$, $\Delta x = \Delta x_M + z^3$, где столбцы z^j - отклонения от модельного движения; вводится обозначение

$$\varphi(x, t) = \{E - B_0^M [(C^1 M + C^3 (M - E)) B_0^M]^{-1} (C^1 M + \\ + C^3 (M - E))\} f_0^M - B_0^M [(C^1 M + C^3 (M - E)) B_0^M]^{-1} \{\dot{C}^1 (x + \Delta x) + \\ + C^1 [L(G\eta + Hx + HX_{np}) + (M - E)\dot{X}_{np}] + \dot{C}^2 \eta + \\ + C^2 [G\eta + Hx + HX_{np}] + \dot{C}^3 \Delta x + C^3 [L(G\eta + Hx + HX_{np}) + \\ + (M - E)\dot{X}_{np}]\}$$

и вычитается модельная система (69) из системы скользящего режима (59) получаем систему (73):

$$\dot{z}^1 = \{(\varphi(x_M + z^1, t) - \varphi(x_M, t)) + \{E - B_0^M [(C^1 M + C^3 (M - E)) B_0^M]^{-1} \times \\ \times (C^1 M + C^3 (M - E))\} (f_0^2(x_M + z^1, t) + \Delta f^2(x_M + z^1, t) + \\ + \Delta D^2(x_M + z^1, t) F)\}, \\ \dot{z}^2 = Gz^2 + Hz^1, \\ \dot{z}^3 = L[Gz^2 + Hz^1] + [M - E] \{(\varphi(x_M + z^1, t) - \varphi(x_M, t)) + \\ + \{E - B_0^M [(C^1 M + C^3 (M - E)) B_0^M]^{-1} (C^1 M + C^3 (M - E))\} \times \\ \times (f_0^2(x_M + z^1, t) + \Delta f^2(x_M + z^1, t) + \Delta D^2(x_M + z^1, t) F)\};$$

рассматривается интегральная форма системы (73); учитывается $z^j(t_i) = 0$, $j = \overline{1,3}$; применяется лемма Гронуолла-Беллмана в предположении о малости шагов I_i и норм $\|C^j(t_i)\|$, $j = \overline{1,3}$.

7. Методы построения разрывного управления.

Методы отличаются в зависимости от того, выполняются или нет условия

$$\Delta f^2 \equiv 0, \Delta D^2 \equiv 0, f_0^2 \equiv 0. \quad (74)$$

В первом случае, при выполнении тождеств (74), возможно тождественное воспроизведение модельного движения системы (14)

$$x(t) \equiv x_M(t), \quad \eta(t) \equiv \eta_M(t), \quad \Delta x(t) \equiv \Delta x_M(t) \quad (75)$$

с начального момента $t = t_0$. Следовательно, если условия (75) выполняются при $t = t_0$, необходимые для построения управления u векторы состояния $x_\theta(t)$, $x(t)$, $\eta(t)$, $\Delta x(t)$, где $x_\theta = x + \Delta x$, могут быть найдены по модельной системе (14). Если же использовать ещё и вектор x_θ , формируемый по показаниям датчиков ($x_\theta = x + \Delta x = X_\partial - X_{np}$), то можно интегрировать только первые два уравнения модели (14) для нахождения x_M и η_M . Вектор Δx при этом находится как разность $\Delta x = \Delta x_M = x_\theta - x_M$. Следовательно, за многообразие скольжения может быть принято многообразие S общего вида (16).

Во втором случае, если хотя бы одно из тождеств (74) не выполняется, тождественное воспроизведение невозможно. При воспроизведении же с заданной точностью с помощью многшагового скользящего режима, как показано в разделе 6, векторы состояния x , η , Δx с модельными x_M , η_M , Δx_M не совпадают. Поэтому единственной доступной информацией о состоянии системы является вектор $x_\theta = X_\partial - X_{np}$. Следовательно, за многообразие скольжения S может быть принято только многообразие (15).

Рассмотрим подробнее методы построения разрывного управления в этих двух случаях.

Первый случай. Рассматривается система (12) в координатах $x_\theta = x + \Delta x$, η , Δx :

$$\begin{aligned} \dot{x}_\theta &= M(f(x_\theta - \Delta x, t) + BU + DF) + L(G\eta + Hx + HX_{np}) + \\ &+ (M - E)\dot{X}_{np}; \\ \dot{\eta} &= G\eta + H(x_\theta - \Delta x + X_{np}); \\ \Delta \dot{x} &= L(G\eta + Hx + HX_{np}) + (M - E)\dot{X}_{np} + (M - E)(f + BU + DF). \end{aligned} \quad (76)$$

Применяются основные положения (формулы (29)-(32)) методика раздела 4:

$$\begin{aligned} S(s = C^1(t)x_\theta(t) + C^2(t)\eta(t) + C^3(t)\Delta x(t) = 0); \\ u = u_0 + u_\Delta; \quad \dot{s} = \dot{s}_0 + \dot{s}_\Delta; \end{aligned} \quad (77)$$

$$\begin{aligned} \dot{s}_0 = & \dot{C}^1 x_{\varepsilon} + C^1 [M(f_0 + D_0 F_0) + L(G\eta + H(x_{\varepsilon} - \Delta x + X_{np})) + \\ & + (M - E)\dot{X}_{np}] + \dot{C}^2 \eta + C^2 [G\eta + H(x_{\varepsilon} - \Delta x + X_{np})] + \dot{C}^3 \Delta x + \\ & + C^3 [L(G\eta + H(x_{\varepsilon} - \Delta x + X_{np})) + (M - E)\dot{X}_{np} + (M - E) \times \\ & \times (f_0 + D_0 F_0)] + \{[C^1 M + C^3 (M - E)]B_0^M\} (E + \Lambda_2) u_0 = \kappa_g g + \kappa_s s, \end{aligned} \quad (78)$$

где, например, $g = (g_1, \dots, g_m)^T$, $g_i = d_j^T(t) x_{\varepsilon}$, $d^T = (d_{j1}, \dots, d_{jn})$;

$$\begin{aligned} \dot{s}_{\Delta} = & [C^1 M + C^3 (M - E)] \{\Delta f + D_0 \Delta F + \Delta D F_0 + \Delta D \Delta F + \\ & + B_0^M [\Lambda_6 U_0 + (E + \Lambda_2 + \Lambda_6) u_{\Delta}]\}, \end{aligned} \quad (79)$$

где в Δf , ΔD , и f_0 полагается: $\Delta f^2 \equiv 0$, $\Delta D^2 \equiv 0$ и $f_0^2 \equiv 0$.

В силу равенства (78) получаем u_0 :

$$\begin{aligned} u_0 = & \{[\cdot]B_0^M (E + \Lambda_2)\}^{-1} \{\kappa_g g + \kappa_s s - \{\dot{C}^1 x_{\varepsilon} + C^1 [M(f_0 + D_0 F_0) + \\ & + L(G\eta + H(x_{\varepsilon} - \Delta x + X_{np})) + (M - E)\dot{X}_{np}] + \dot{C}^2 \eta + C^2 \times \\ & \times [G\eta + H(x_{\varepsilon} - \Delta x + X_{np})] + \dot{C}^3 \Delta x + C^3 [L(G\eta + H(x_{\varepsilon} - \Delta x + X_{np}) + \\ & + (M - E)\dot{X}_{np} + (M - E)(f_0 + D_0 F_0)]\}\}, \end{aligned} \quad (80)$$

где $[\cdot] = [C^1 M + C^3 (M - E)]$ и предполагается выполненным условие (39) для $x = x_{\varepsilon} - \Delta x \in \Omega_x$:

$$|E + \Lambda_2(x_{\varepsilon} - \Delta x, t)| \neq 0 \forall x = x_{\varepsilon} - \Delta x \in \Omega_x, t \in I. \quad (81)$$

Управление u_{Δ} сформируем со структурой

$$u_{\Delta} = \{[\cdot]B_0^M (E + \Lambda_2)\}^{-1} \sum_{j=1}^6 u_{\Delta}^j, \quad u_{\Delta}^j = (u_{\Delta 1}^j, \dots, u_{\Delta m}^j)^T. \quad (82)$$

Тогда производная $\dot{s}_{\Delta}$ (79) может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned} \dot{s}_{\Delta} = & \{[\cdot]\Delta f + u_{\Delta}^1\} + \{[\cdot]D_0 \Delta F + u_{\Delta}^2\} + \{[\cdot]\Delta D F_0 + u_{\Delta}^3\} + \\ & + \{[\cdot]\Delta D \Delta F + u_{\Delta}^4\} + \{[\cdot]B_0^M \Lambda_6 u_0 + u_{\Delta}^5\} + \{[\cdot]B_0^M \Lambda_6 u_{\Delta} + u_{\Delta}^6\}, \end{aligned} \quad (83)$$

где $[\cdot]B_0^M \Lambda_6 u_{\Delta} = N(\Lambda_6) \sum_{J=1}^6 u_{\Delta}^J$, $N(\Lambda_6) = [\cdot]B_0^M \Lambda_6 \{[\cdot]B_0^M (E + \Lambda_2)\}^{-1}$ -

$m \times m$ - матрица, или в более раскрытом виде

$$\begin{aligned} \dot{s}_{\Delta} = & \{[\cdot]\Delta f + (E + N)u_{\Delta}^1\} + \{[\cdot]D_0 \Delta F + (E + N)u_{\Delta}^2\} + \{[\cdot]\Delta D F_0 + \\ & + (E + N)u_{\Delta}^3\} + \{[\cdot]\Delta D \Delta F + (E + N)u_{\Delta}^4\} + \{[\cdot]B_0^M \Lambda_6 u_0 + \\ & + (E + N)u_{\Delta}^5\} + (E + N)u_{\Delta}^6, \end{aligned} \quad (84)$$

$$\begin{aligned}
\dot{s}_{\Delta i} = & \{ [\cdot]_i \Delta f + (1 + N_{ii}) u_{\Delta i}^1 \} + \{ [\cdot]_i D_0 \Delta F + (1 + N_{ii}) u_{\Delta i}^2 \} + \\
& + \{ [\cdot]_i \Delta D F_0 + (1 + N_{ii}) u_{\Delta i}^3 \} + \{ [\cdot]_i \Delta D \Delta F + (1 + N_{ii}) u_{\Delta i}^4 \} + \\
& + \{ [\cdot]_i B_0^M \Lambda_6 u_0 + (1 + N_{ii}) u_{\Delta i}^5 \} + \left\{ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m N_{ij} (u_{\Delta j}^1 + \dots + u_{\Delta j}^6) + (1 + N_{ii}) u_{\Delta i}^6 \right\},
\end{aligned} \tag{85}$$

где $i = \overline{1, m}$. Согласно выражениям $\dot{s}_{\Delta i}$ (85) получаем, что условия попадания (32) выполняются, например, при

$$u_{\Delta i}^1 = \sum_{r=1}^n u_{\Delta ir}^1, \quad u_{\Delta ir}^1 = \kappa_{ir}^1 [\cdot]_{ir}, \tag{86}$$

где

$$\begin{aligned}
\text{sign}(1 + N_{ii}) \kappa_{ir}^{1+} & \begin{cases} < \inf_{\Lambda_6, \Delta f_r} (-\Delta f_r / |1 + N_{ii}|) & \text{npu } s_i [\cdot]_{ir} > 0, \\ > \sup_{\Lambda_6, \Delta f_r} (-\Delta f_r / |1 + N_{ii}|) & \text{npu } s_i [\cdot]_{ir} \leq 0; \end{cases} \\
u_{\Delta i}^j = \sum_{r=1}^n u_{\Delta ir}^j, \quad u_{\Delta ir}^j = \kappa_{ir}^j [\cdot]_{ir}, \quad j = 2, 3, 4,
\end{aligned} \tag{87}$$

$$\begin{aligned}
\text{sign}(1 + N_{ii}) \kappa_{ir}^{j+} & \begin{cases} \inf_{\Lambda_6, \Delta \varphi_r^j} (-\Delta \varphi_r^j / |1 + N_{ii}|) & \text{npu } s_i [\cdot]_{ir} > 0, \\ \sup_{\Lambda_6, \Delta \varphi_r^j} (-\Delta \varphi_r^j / |1 + N_{ii}|) & \text{npu } s_i [\cdot]_{ir} \leq 0, \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta \varphi_r^2 &= (\Delta \varphi_1^2, \dots, \Delta \varphi_n^2)^T = D_0 \Delta F, \quad \Delta \varphi_r^3 = (\Delta \varphi_1^3, \dots, \Delta \varphi_n^3)^T = \Delta D F_0, \\
\Delta \varphi_r^4 &= (\Delta \varphi_1^4, \dots, \Delta \varphi_n^4)^T = \Delta D \Delta F;
\end{aligned}$$

$$u_{\Delta i}^5 = \sum_{r=1}^m u_{\Delta ir}^5, \quad u_{\Delta ir}^5 = \sum_{k=1}^m u_{\Delta irk}^5, \quad u_{\Delta irk}^5 = \kappa_{irk}^5 [\cdot]_i B_0^{M,r} u_{0k}, \tag{88}$$

$$\text{sign}(1 + N_{ii}) \kappa_{irk}^{5+} \begin{cases} < \inf_{\Lambda_6} (-\Lambda_{rk} / |1 + N_{ii}|) & \text{npu } s_i [\cdot]_i B_0^{M,r} u_{0k} > 0, \\ > \sup_{\Lambda_6} (-\Lambda_{rk} / |1 + N_{ii}|) & \text{npu } s_i [\cdot]_i B_0^{M,r} u_{0k} \leq 0, \end{cases}$$

где учтено, что

$$\Lambda_6 u_0 = \left(\sum_{j=1}^m \Lambda_{1j} u_{0j}, \dots, \sum_{j=1}^m \Lambda_{mj} u_{0j} \right)^T,$$

$$[\cdot]_i B_0^M \Lambda_6 u_0 = [\cdot]_I B_0^{M,1} \sum_{j=1}^m \Lambda_{1j} u_{0j} + \dots + [\cdot]_I B_0^{M,m} \sum_{j=1}^m \Lambda_{mj} u_{0j},$$

Λ_{rj} и $B_0^{M,r}$ - элементы матрицы Λ_6 и столбцы матрицы B_0^M ;

$$u_{\Delta i}^6 = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m u_{\Delta ij}^6; \quad u_{\Delta ij}^6 = \kappa_{ij}^6(u_{\Delta j}^1 + \dots + u_{\Delta j}^6), \quad j \neq i, \quad (89)$$

$$\text{sign}(1 + N_{ii}) \kappa_{ij}^{6+} \begin{cases} \inf_{\Lambda_6} (-N_{ij} / |1 + N_{ii}|) & \text{при } s_i(u_{\Delta j}^1 + \dots + u_{\Delta j}^6) > 0, \\ \sup_{\Lambda_6} (-N_{ij} / |1 + N_{ii}|) & \text{при } s_i(u_{\Delta j}^1 + \dots + u_{\Delta j}^6) \leq 0. \end{cases}$$

Замечание 5. Релейной составляющей u_p в управлении u здесь не требуется, так как малые составляющие произведения $\Delta D \Delta F$ не отбрасывались, а разложения в ряд Тейлора не применялись.

Рассмотрим второй случай. Так как измеряется только вектор x_g , то многообразие S задается в виде (15)

$$S(s = C^1(t)x_g = 0). \quad (90)$$

Для того, чтобы не использовать координаты x, η и Δx в дальнейшем построении управления u . Приводящего систему (76) в скольжение на S (90), представим их как суммы

$$x = x_M + z^1, \quad \eta = \eta_M + z^2, \quad \Delta x = \Delta x_M + z^3, \quad (91)$$

где $x_M, \eta_M, \Delta x_M$ - векторы, определяемые по модели, а z^1, z^2, z^3 - векторы малых отклонений:

$$z^1 = (z_1^1, \dots, z_n^1)^T, \quad z^2 = (z_1^2, \dots, z_n^2)^T, \quad z^3 = (z_1^3, \dots, z_n^3)^T.$$

Все функции, зависящие в производной $\dot{s}$ от x, η и Δx , раскладываем в ряды Тейлора по степеням отклонений:

$$\begin{aligned} f_0(x, t) &= f_0(x_M, t) + a_f z^1 + R_1, \\ D_0(x, t) &= D_0(x_M, t) + a_D(x_M, z^1, t) + R_2, \\ G\eta &= G\eta_M + Gz^2, \\ B_0^M(x, t) &= B_0^M(x_M, t) + a_B(x_M, z^1, t) + R_3, \\ \Lambda_2(x, t) &= \Lambda_2(x_M, t) + a_\Lambda(x_M, z^1, t) + R_4, \end{aligned} \quad (92)$$

где

$$\begin{aligned} a_f &= \frac{\partial f_0}{\partial x} \Big|_{x_M}; \quad a_D = (a_D^1 z^1, \dots, a_D^l z^1), \quad a_D^j = \frac{\partial D_0^j}{\partial x} \Big|_{x_M}, \quad j = \overline{1, l}; \\ a_B &= (a_B^1 z^1, \dots, a_B^M z^1), \quad a_B^i = \frac{\partial B_0^{M, i}}{\partial x} \Big|_{x_M}; \quad a_\Lambda = (a_\Lambda^1 z^1, \dots, a_\Lambda^m z^1), \\ a_\Lambda^i &= \frac{\partial \Lambda_2^i}{\partial x} \Big|_{x_M}, \quad i = \overline{1, m}; \end{aligned}$$

R_j - остаточные члены рядов, $j = \overline{1,4}$. Управление u и производная $\dot{s}$, как и в первом случае, находятся в виде сумм (77). Тогда после отбрасывания малых R_j и произведений $a_B a_\Lambda, a_B \Lambda_6$ в выражении для $B(x, t)$

$$B(x, t) = B_0^M [E + \Lambda_2 + \Lambda_6] = B_0^M (x_M, t) + a_B [E + \Lambda_2(x_M, t) + a_\Lambda + \Lambda_6], \quad (93)$$

а также малых произведений $a_D \Delta F, \Delta D \Delta F$, получаем следующие выражения для $\dot{s}_0$ и $\dot{s}_\Delta$:

$$\begin{aligned} \dot{s}_0 = & \dot{C}^1 x_\varepsilon + C^1 [M(f_0(x_M, t) + D_0(x_M, t)F_0) + L(G\eta + H(x_M + X_{np})) + \\ & (M - E)\dot{X}_{np}] + C^1 M B_0^M (x_M, t)(E + \Lambda_2(x_M, t))u_0 = \kappa_g g + \kappa_s s, \end{aligned} \quad (94)$$

и

$$\begin{aligned} \dot{s}_\Delta = & C^1 M \Delta f + C^1 M a_D F_0 + C^1 M \Delta D F_0 + C^1 L G z^2 + C^1 L H z^1 + \\ & + C^1 M B_0^M a_\Lambda u_0 + C^1 M B_0^M \Lambda_6 u_0 + C^1 M a_B (E + \Lambda_2(x_M, t))u_0 + \\ & + \{C^1 M [B_0^M (a_\Lambda + \Lambda_6) + a_B (E + \Lambda_2)] + C^1 M B_0^M (E + \Lambda_2)\} u_\Delta. \end{aligned} \quad (95)$$

Из соотношения (94) следует, что

$$\begin{aligned} u_0 = & [C^1 M B_0^M (E + \Lambda_2)]^{-1} \{ \kappa_g g + \kappa_s s - C^1 [M(f_0 + D_0 F_0) + \\ & + L(G\eta_M + H(x_M + X_{np})) + (M - E)\dot{X}_{np}] \}, \end{aligned} \quad (96)$$

где $g = (g_1, \dots, g_m)^T$, $g_j = d_j^T(t)x_\varepsilon$, $d_j^T = (d_{j1}, \dots, d_{jn})$.

Для управления u_Δ задаёмся структурой

$$u_\Delta = [C^1 M B_0^M (E + \Lambda^2)]^{-1} \sum_{j=1}^9 u_\Delta^j, \quad u_\Delta^j = (u_{\Delta 1}^j, \dots, u_{\Delta m}^j)^T. \quad (97)$$

Введём обозначение $N(\Lambda_6, z^1)$ для $m \times m$ - матрицы:

$$\begin{aligned} N(\Lambda_6, z^1) = & C^1 M [B_0^M (a_\Lambda + a_6) + a_B (E + \Lambda_2(x_M, t))] \times \\ & \times [C^1 M B_0^M (E + \Lambda_2)]^{-1}. \end{aligned} \quad (98)$$

Тогда производная $\dot{s}_\Delta$ (95) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \dot{s}_\Delta = & \{C^1 M \Delta f + (E + N)u_\Delta^1\} + \{C^1 M a_D F_0 + (E + N)u_\Delta^2\} + \\ & + \{C^1 M \Delta D F_0 + (E + N)u_\Delta^3\} + \{C^1 L G z^2 + (E + N)u_\Delta^4\} + \\ & + \{C^1 L H z^1 + (E + N)u_\Delta^5\} + \{C^1 M B_0^M a_\Lambda u_0 + (E + N)u_\Delta^6\} + \\ & + \{C^1 M B_0^M \Lambda_6 u_0 + (E + N)u_\Delta^7\} + \{C^1 M a_B (E + \Lambda_2(x_M, t))u_0 + \\ & + (E + N)u_\Delta^8\} + \{(E + N)u_\Delta^9\}, \end{aligned} \quad (99)$$

а её i - я составляющая $\dot{s}_{\Delta i}$ в виде

$$\begin{aligned}
 \dot{s}_{\Delta i} = & \left\{ \sum_{k=1}^n C_i^1 M^k \Delta f_k + (1 + N_{ii}) u_{\Delta i}^1 \right\} + \left\{ \sum_{k=1}^n P_{ik}(t) z_k^1 + (1 + N_{ii}) u_{\Delta i}^2 \right\} + \\
 & + \left\{ \sum_{k=1}^n C_i^1 M^k \left(\sum_{j=1}^l \Delta D_{kj} F_{0j} \right) + (1 + N_{ii}) u_{\Delta i}^3 \right\} + \left\{ \sum_{k=1}^r C_i^1 \mu^k z_k^2 + (1 + N_{ii}) u_{\Delta i}^4 \right\} + \\
 & + \left\{ \sum_{k=1}^n C_i^1 q^k z_k^1 + (1 + N_{ii}) u_{\Delta i}^5 \right\} + \left\{ \sum_{k=1}^n h_{ik}(t) z_k^1 + (1 + N_{ii}) u_{\Delta i}^6 \right\} + \\
 & + \left\{ \sum_{j=1}^{m^2} d_{ij}(t) \lambda_{j6} + (1 + N_{ii}) u_{\Delta i}^7 \right\} + \left\{ \sum_{k=1}^n q_{ik}(t) z_k^1 + (1 + N_{ii}) u_{\Delta i}^8 \right\} + \\
 & + \left\{ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m N_{ij} (u_{\Delta i}^1 + \dots + u_{\Delta i}^9) + (1 + N_{ii}) u_{\Delta i}^9 \right\},
 \end{aligned} \tag{100}$$

где N_{ii} - диагональные элементы $m \times m$ -матрицы N (98); $\sum_{k=1}^n P_{ik}(t) z_k^1$ - i - я

строка $m \times 1$ - столбца $C^1 M a_D F_0$; $\sum_{k=1}^r C_i^1 \mu^k z_k^2$ - i - я строка $m \times 1$ - столбца

$C^1 L G z^2$, r - размерность вектора η ;

$\sum_{k=1}^n C_i^1 q^k z_k^1$ - i - я строка $m \times 1$ - столбца $C^1 L H z^1$;

$\sum_{k=1}^n h_{ik}(t) z_k^1$ - i - я строка $m \times 1$ - столбца $C^1 M B_0^M a_{\Lambda} u_0$;

$\sum_{i=1}^m d_{ij}(t) \lambda_{j6}$ - i - я строка $m \times 1$ - столбца $C^1 M B_0^M \Lambda_6 u_0$,

λ_{j6} - элементы матрицы Λ_6 , записанные, например, по строкам;

$\sum_{k=1}^n q_{ir}(t) z_k^1$ - i - я строка $m \times 1$ - столбца $C^1 M a_B (E + \Lambda_2(x_M, t)) u_0$.

Неравенства $\dot{s}_{\Delta i} s_i < 0$ (32) выполняются, например, если управления $u_{\Delta i}^1, \dots, u_{\Delta i}^9$, $j = \overline{1, m}$, задать в виде:

$$u_{\Delta i}^1 = \sum_{k=1}^n u_{\Delta i k}^1, \quad u_{\Delta i k}^1 = \kappa_{ik}^1 C_i^1 M^k, \tag{101}$$

где

$$\text{sign}(1 + N_{ii}) \kappa_{ik}^{1+} \begin{cases} < \inf_{\Delta f_k, z^1, \Lambda_6} (-\Delta f_k / |1 + N_{ii}|) \quad \text{при} \quad s_i C_i^1 M^k > 0; \\ > \sup_{\Delta f_k, z^1, \Lambda_6} (-\Delta f_k / |1 + N_{ii}|) \quad \text{при} \quad s_i C_i^1 M^k \leq 0; \end{cases}$$

$$u_{\Delta i}^2 = \sum_{k=1}^n u_{\Delta ik}^2, \quad u_{\Delta ik}^2 = \kappa_{ik}^2 P_{ik}(t), \quad (102)$$

где

$$\left. \begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} & < \inf_{z^1, \Lambda_6} (-z_k^1 / |1 + N_{ii}|) \quad \text{npu} \quad s_i P_{ik}(t) > 0; \\ & > \sup_{z^1, \Lambda_6} (-z_k^1 / |1 + N_{ii}|) \quad \text{npu} \quad s_i P_{ik}(t) \leq 0; \end{aligned} \right. \\ & u_{\Delta i}^3 = \sum_{k=1}^n u_{\Delta ik}^3, \quad u_{\Delta ik}^3 = \sum_{j=1}^l u_{\Delta ikj}^3, \quad u_{\Delta ikj}^3 = \kappa_{ikj}^3 c_i^1 M^k F_{0j}(t), \end{aligned} \right\} \quad (103)$$

где

$$\left. \begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} & < \inf_{z^1, \Delta D_{kj}, \Lambda_6} (-\Delta D_{kj} / |1 + N_{ii}|) \quad \text{npu} \quad s_i c_i^1 M^k F_{0j}(t) > 0; \\ & > \sup_{z^1, \Delta D_{kj}, \Lambda_6} (-\Delta D_{kj} / |1 + N_{ii}|) \quad \text{npu} \quad s_i c_i^1 M^k F_{0j}(t) \leq 0; \end{aligned} \right. \\ & u_{\Delta i}^4 = \sum_{k=1}^r u_{\Delta ik}^4, \quad u_{\Delta ik}^4 = \kappa_{ik}^4 c_i^1 \mu^k, \end{aligned} \right\} \quad (104)$$

где

$$\left. \begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} & < \inf_{z^1, z_k^2, \Lambda_6} (-z_k^2 / |1 + N_{ii}|) \quad \text{npu} \quad s_i c_i^1 \mu^k > 0; \\ & > \sup_{z^1, z_k^2, \Lambda_6} (-z_k^2 / |1 + N_{ii}|) \quad \text{npu} \quad s_i c_i^1 \mu^k \leq 0; \end{aligned} \right. \\ & u_{\Delta i}^5 = \sum_{k=1}^n u_{\Delta ik}^5, \quad u_{\Delta ik}^5 = \kappa_{ik}^5 c_i^1 q^k, \end{aligned} \right\} \quad (105)$$

где

$$\left. \begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} & < \inf_{z^1, \Lambda_6} (-z_k^1 / |1 + N_{ii}|) \quad \text{npu} \quad s_i c_i^1 q^k > 0; \\ & > \sup_{z^1, \Lambda_6} (-z_k^1 / |1 + N_{ii}|) \quad \text{npu} \quad s_i c_i^1 q^k \leq 0; \end{aligned} \right. \\ & u_{\Delta i}^6 = \sum_{k=1}^n u_{\Delta ik}^6, \quad u_{\Delta ik}^6 = \kappa_{ik}^6 h_{ik}(t), \end{aligned} \right\} \quad (106)$$

где

$$\left. \begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} & < \inf_{z^1, \Lambda_6} (-z_k^1 / |1 + N_{ii}|) \quad \text{npu} \quad s_i h_{ik}(t) > 0; \\ & > \sup_{z^1, \Lambda_6} (-z_k^1 / |1 + N_{ii}|) \quad \text{npu} \quad s_i h_{ik}(t) \leq 0; \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\}$$

$$u_{\Delta i}^7 = \sum_{j=1}^{m^2} u_{\Delta ij}^7, \quad u_{\Delta ij}^7 = \kappa_{ij}^7 d_{ij}(t), \quad (107)$$

где

$$\text{sign}(1 + N_{ii}) \kappa_{ij}^{7+} \begin{cases} < \inf_{z^1, \lambda_{j6}, \Lambda_6} (-\lambda_{j6} / |1 + N_{ii}|) \quad \text{npu} \quad s_i d_{ij}(t) > 0; \\ > \sup_{z^1, \lambda_{j6}, \Lambda_6} (-\lambda_{j6} / |1 + N_{ii}|) \quad \text{npu} \quad s_i d_{ij}(t) \leq 0; \end{cases}$$

$$u_{\Delta i}^8 = \sum_{k=1}^n u_{\Delta ik}^8, \quad u_{\Delta ik}^8 = \kappa_{ik}^8 g_{ik}(t), \quad (108)$$

где

$$\text{sign}(1 + N_{ii}) \kappa_{ik}^{8+} \begin{cases} < \inf_{z^1, \Lambda_6} (-g_{ik}(t) / |1 + N_{ii}|) \quad \text{npu} \quad s_i g_{ik}(t) > 0; \\ > \sup_{z^1, \Lambda_6} (-g_{ik}(t) / |1 + N_{ii}|) \quad \text{npu} \quad s_i g_{ik}(t) \leq 0; \end{cases}$$

$$u_{\Delta i}^9 = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m u_{\Delta ij}^9, \quad u_{\Delta ij}^9 = \kappa_{ij}^9 (u_{\Delta j}^1 + \dots + u_{\Delta j}^9), \quad (109)$$

где

$$\text{sign}(1 + N_{ii}) \kappa_{ij}^{9+} \begin{cases} < \inf_{z^1, \Lambda_6} (-N_{ij} / |1 + N_{ii}|) \quad \text{npu} \quad s_i (u_{\Delta j}^1 + \dots + u_{\Delta j}^9) > 0; \\ > \sup_{z^1, \Lambda_6} (-N_{ij} / |1 + N_{ii}|) \quad \text{npu} \quad s_i (u_{\Delta j}^1 + \dots + u_{\Delta j}^9) \leq 0. \end{cases}$$

Замечание 6. Управления u_0 (96), u_{Δ} (97) существуют при

$$\left| C^1 M B_0^M (E + \Lambda_2) \right| \neq 0 \forall x_M \in \Omega_x, \quad t \in I. \quad (110)$$

Следовательно, если матрица M в системе уравнений датчиков (10) не удовлетворяет условию (110) (в частности, при $M = 0$ - $n \times n$ для большинства случаев датчиков), то многошаговый скользящий режим при имеющемся объеме информации $(x_e, x_M, \eta_M, \Delta x_M)$ неосуществим. Использование же информации о $x, \eta, \Delta x$ лишает смысла использование датчиков.

Замечание 7. Для компенсации возможного неблагоприятного действия отброшенных малых векторных величин $R_i, i = \overline{1, 4}$, в разложениях (92), а также малых произведений в $\dot{s}_0$ (94) и $\dot{s}_{\Delta}$ (95), на процесс приведения системы (76) в скользящий режим при малых по модулю разрывных коэффициентах K в u_0 и u_{Δ} предлагается в управление u (77) ввести релейную добавку u_P (замечание 3):

$$u = u_0 + u_P + u_{\Delta}, \quad (111)$$

которая может быть найдена, например, из условия

$$\dot{s}_0 = \kappa_g g + \kappa_s s + \delta \operatorname{sign} s, \quad \delta = \operatorname{diag}\{\delta_1, \dots, \delta_m\}, \quad \delta_i < 0. \quad (112)$$

С учётом выражений для $\dot{s}_0$ (94) и u_0 (96) получаем, что

$$u_p = (u_{p1}, \dots, u_{pm})^T = [C^1 M B_0^M(x_M, t)(E + \Lambda_2(x_M, t))]^{-1} \delta \operatorname{sign} S. \quad (113)$$

В коэффициенты $h_{ik}(t)$, $d_{ij}(t)$, $q_{ik}(t)$ управлений $u_{\Delta i}^6$ (106), $u_{\Delta i}^7$ (107), $u_{\Delta i}^8$ (108), зависящих от u_0 , необходимо в этом случае подставлять не u_0 , а сумму $u_0 + u_p$, где u_0 и u_p определяются по формулам (96) и (113).

8. Применение результатов для управления агрегированной системой экономических объектов (АСЭО).

Рассмотрим уравнения АСЭО [11]. Дополняемые неопределёнными возмущениями, они могут быть приведены к системе дифференциальных уравнений в нормальном виде:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= y + \Delta K(t) \Delta \mathcal{G}, \quad \Delta \mathcal{G} < 0; \\ \dot{y} &= -\rho(t)y + \eta(t)u, \end{aligned} \quad (114)$$

где $t \in I = (t_0, t_k]$, $t_0 = 0$, $t_k = 5$ лет, $q(t)$ - количество выпущенной продукции, $y(t)$ - мощность АСЭО, $u(t)$ - поток вновь поступающих и сразу используемых основных фондов; $\rho(t) = \rho_0(t) + \Delta\rho(t)$; $\eta(t) = \eta_0(t) + \Delta\eta(t)$; ограниченные неопределённые возмущения $\Delta\rho, \Delta\eta$ и $\Delta K, \Delta\mathcal{G}$ вызваны неопределённостями в потоках основных ($\Phi(t)$) и оборотных ($\mathcal{G}(t)$) фондов. В передаче и обработке информации о q и y на формирование управления u имеются чистые запаздывания τ_1 и τ_2 (в днях).

Требуется систему АСЭО, описываемую уравнениями (114), вывести из критического состояния, вызванного неопределёнными возмущениями $\Delta\rho, \Delta\eta$ и $\Delta K, \Delta\mathcal{G}$, и обеспечить к моменту $t = t_k$ заданную мощность y^* . Значение $q(t_k)$ не задаётся, на сигнал управления $u(t)$ имеются ограничения $0 \leq u(t) \leq u^*$.

Введём обозначения:

$$x = (x_1, x_2)^T = (q, y)^T, \quad f(x, t) = (x_2, -\rho(t)x_2)^T, \quad B(t) = (0, \eta(t))^T,$$

$$D(t) = (K(t), 0)^T, \quad \Delta F(t) = \Delta\mathcal{G}(t).$$

Тогда в обозначениях системы (1) - (8) получаем:

$$B_0 = B_0^M = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_0 \end{pmatrix}; \quad f_0 = f_0^M = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\rho_0 x_2 \end{pmatrix}, \quad f_0^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_0^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\Delta f = \Delta f^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\Delta\rho x_2 \end{pmatrix} = B_0^M \Lambda_5, \quad \Lambda_5 = -\frac{\Delta\rho x_2}{\eta_0}; \quad \Delta f^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$B_0^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_2 = 0; \quad \Delta B = \Delta B^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta\eta \end{pmatrix} = B_0^M \Lambda_6, \quad \Lambda_6 = \frac{\Delta\eta}{\eta_0};$$

$$D_0^{M1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D_0^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta D^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta D^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad F_0 = 0, \quad \Delta F = \Delta\mathcal{G}(t);$$

$$\Lambda_1 = \Lambda_3 = \Lambda_5 = \Lambda_7 = 0; \quad X_{np} = 0, \quad x = X, \quad \Delta x = \Delta X, \quad x_\theta = x + \Delta x = x_\theta.$$

Решим задачу 1. Пусть чистые запаздывания τ_1, τ_2 заранее неизвестны, т. е. Являются ограниченными неопределёнными величинами.

Таковыми же величинами будут являться и ошибки в измерениях q и y . Условия инвариантности (5) в системе (114), как следует из выражения (115), выполняются.

Модельная система (13) принимает вид

$$\dot{x}_M = f_0^M + B_0^M U_M, \quad (116)$$

где f_0^M и B_0^M приведены в выражениях (115). Модельное многошаговое терминальное управление (МТУ) u_M , выводящее систему (116) с точностью $0,001(y_M(t_i) - y^*)$ за время $t_k - t_i, i = \overline{0, k-1}$, на мощность y^* по экспоненте, запишется

$$\begin{aligned} u_M = u_M^i &= \eta_0^{-1} [(\rho_0 - \gamma_i) y_M + \gamma_i y^*], \\ \gamma_i &= -\ln 0,001 / (t_k - t_i), i = \overline{0, k-1}. \end{aligned} \quad (117)$$

Система (20), описывающая многошаговый скользящий режим на прямой скольжения S (15) (118):

$$S(s = C(t)x_s = C_1(t)x_{s1} + C_2(t)x_{s2} = C_1(t)q_s(t) + C_2(t)y_s(t) = 0),$$

на каждом i -м шаге $I_i = (t_i, t_{i+1}]$, $i = \overline{0, k-1}$, запишется

$$\begin{aligned} \dot{q} &= y + \Delta K \Delta g, \\ \dot{y} &= -\frac{C_1}{C_2} y - \frac{C_1}{C_2} \Delta K \Delta g - \frac{1}{C_2} [\dot{C}_1(q + \Delta q) + \dot{C}_2(y + \Delta y) + \\ &C_1 \Delta \dot{q} + C_2 \Delta \dot{y}], \end{aligned} \quad (119)$$

где $C_1(q + \Delta q) + C_2(y + \Delta y) = 0$, $(x_s \in S)$, $t \in I_i$, $i = \overline{0, k-1}$.

Система дифференциальных уравнений (25) для определения переменных коэффициентов $C_1(t), C_2(t)$, при задании матрицы A в произведении $R = Ax_M$ (24) в виде

$$A = (A^1, A^2) = \begin{pmatrix} \frac{x_{M1}}{x_{M2}} & 0 \\ -\frac{\rho_0 x_{M2} + \eta u_M^i}{x_{M1}} & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (120)$$

запишется

$$\dot{C}_1 = -(C_1, C_2)A^1 = \frac{y_M}{q_M} C_1 + \frac{\eta_0 u_M^i - \rho_0 y_M}{q_M} C_2, \quad (121)$$

где

$$C_1(t_i)q_s(t_i) + C_2(t_i)y_s(t_i) = 0, \quad C_2 = C_2(t_i) = \text{const}, \quad x_M(t_i) = x(t_i), \quad i = \overline{0, k}.$$

В управлении u (29)

$$u = u_0 + u_\Delta, \quad (122)$$

приводящем систему (114) в скользящий режим на гиперплоскости S (118), с учётом равенств $a_B^i = 0$, $a_{BE}^i = 0$, $a_D^j = 0$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, b}$, $m = l = 1$;

$$a_f = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \rho_0 \end{pmatrix} u \quad [\cdot]_2 = [\cdot]_3 = [\cdot]_4 = [\cdot]_5 = 0 \quad \text{в выражениях (34) и } \dot{s}_\Delta$$

(36) и равенства $\Lambda_2 = 0$, получаем, согласно формулам для u_0 (40) и u_Δ (41) - (52):

$$u_0 = \frac{1}{c_2 \eta_0} [\kappa_g g + \kappa_s s - (c_1 y_\varepsilon - c_2 \rho_0 y_\varepsilon + \dot{c}_1 q_\varepsilon)], \quad (123)$$

$$u_\Delta = \frac{1}{c_2 \eta_0} (u_\Delta^0 + u_\Delta^1 + u_\Delta^6), \quad (124)$$

где g полагается равным, например, $x_{e1} = q_\varepsilon$;

$$u_\Delta^0 = u_{\Delta 11}^0 + u_{\Delta 12}^0, \quad (125)$$

где $u_{\Delta 11}^0 = \kappa_{11}^0(c_1, c_2)a_f^1 = 0$, так как $a_f^1 = (0, 0)^T$;

$$u_{\Delta 12}^0 = \kappa_{12}^0(c_1, c_2)a_f^2 = \kappa_{12}^0(c_1 - \rho_0 c_2),$$

$$\text{sign}\left(1 + \frac{\Delta \eta}{\eta_0}\right) \kappa_{12}^{0+} \begin{cases} < \inf_{\Delta \eta, \Delta y} (-\Delta y / |1 + \Delta \eta / \eta_0|) & \text{при } s(c_1 - \rho_0 c_2) > 0; \\ > \sup_{\Delta \eta, \Delta y} (-\Delta y / |1 + \Delta \eta / \eta_0|) & \text{при } s(c_1 - \rho_0 c_2) \leq 0; \end{cases}$$

$$u_\Delta^1 = u_{\Delta 11}^1 + u_{\Delta 12}^1, \quad (126)$$

где

$$\begin{aligned} u_{\Delta 11}^1 &= \kappa_{11}^1 c_1, & u_{\Delta 12}^1 &= \kappa_{12}^1 c_2, \\ \text{sign}\left(1 + \frac{\Delta \eta}{\eta_0}\right) \kappa_{11}^{1+} &\begin{cases} < \inf_{\Delta \eta} (-0 / |1 + \Delta \eta / \eta_0|) = 0 & \text{при } s c_1 > 0; \\ > \sup_{\Delta \eta} (-0 / |1 + \Delta \eta / \eta_0|) = 0 & \text{при } s c_1 \leq 0; \end{cases} \\ \text{sign}\left(1 + \frac{\Delta \eta}{\eta_0}\right) \kappa_{12}^{1+} &\begin{cases} < \inf_{\Delta \rho, \Delta y, y_\varepsilon} \left(\frac{\Delta \rho (y_\varepsilon - \Delta y)}{|1 + \Delta \eta / \eta_0|} \right) & \text{при } s c_2 > 0; \\ > \sup_{\Delta \rho, \Delta y, y_\varepsilon} \left(\frac{\Delta \rho (y_\varepsilon - \Delta y)}{|1 + \Delta \eta / \eta_0|} \right) & \text{при } s c_2 \leq 0; \end{cases} \end{aligned}$$

$$u_\Delta^6 = u_{\Delta 11}^6 = \kappa_{11}^6 b_{11}(t), \quad b_{11}(t) = (c_1, c_2) B_0^M u_0 = c_2 \eta_0 u_0, \quad (127)$$

где

$$\text{sign}\left(1 + \frac{\Delta \eta}{\eta_0}\right) \kappa_{11}^{6+} \begin{cases} < \inf_{\Delta \eta, \eta_0} \left(-\left(\frac{\Delta \eta}{\eta_0}\right) / \left|1 + \frac{\Delta \eta}{\eta_0}\right| \right) & \text{при } s c_2 \eta_0 u_0 > 0; \\ > \sup_{\Delta \eta, \eta_0} \left(-\left(\frac{\Delta \eta}{\eta_0}\right) / \left|1 + \frac{\Delta \eta}{\eta_0}\right| \right) & \text{при } s c_2 \eta_0 u_0 \leq 0. \end{cases}$$

В управлении u_Δ учтено, что

$$N = [C(a_{BE}) + CB_0^M \Lambda_6]_8 (CB_0^M)^{-1} = \Lambda_6 = \frac{\Delta \eta}{\eta_0},$$

а также то, что $u_{\Delta 1}^8 = 0$ в силу скалярности $N(N_{ij} = 0$ при $i, j \neq 1)$.

При введении релейной добавки

$$u_P = \delta \operatorname{sign} s, \quad \delta < 0,$$

в управлении u , необходимо в u_{Δ}^6 (127) подставлять вместо u_0 сумму $u_0 + u_P$.

Решим задачу 2. Пусть величины чистых запаздываний τ_1, τ_2 заранее известны.

С учётом уравнений (10), (11), описывающих запаздывания τ_1, τ_2 , получаем, с учётом $M = E - 2 \times 2$, систему (12) вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, t) + BU + \Delta D^2 \Delta F, \\ \dot{\eta} &= G\eta + Hx, \\ \Delta \dot{x} &= L[G\eta + Hx], \end{aligned} \quad (128)$$

или, в координатах $x_g, \eta, \Delta x$, систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_g &= f(x_g - \Delta x, t) + BU + \Delta D^2 \Delta F + L[G\eta + H(x_g - \Delta x)], \\ \dot{\eta} &= G\eta + H(x_g - \Delta x), \\ \Delta \dot{x} &= L[G\eta + H(x_g - \Delta x)], \end{aligned} \quad (129)$$

с выражениями (115) составляющих правых частей.

За модель принимается система (14) при $M = E$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_M &= f_0^M(x_M, t) + B_0^M(t)u_M, \quad x_M(t_0) = x(t_0), \\ \dot{\eta}_M &= G\eta_M + Hx_M, \quad \eta_M(t_0) = \eta(t_0), \\ \Delta \dot{x}_M &= L(G\eta_M + Hx_M), \quad \Delta x_M(t_0) = \Delta x(t_0), \end{aligned} \quad (130)$$

где, как и в системе (129),

$$\begin{aligned} G &= \begin{pmatrix} 0 & -12/\tau_1 & 0 & 0 \\ 1 & -6/\tau_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12/\tau_2 \\ 0 & 0 & 0 & -6/\tau_2 \end{pmatrix}_{4 \times 4}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -12\tau_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -12\tau_2 \end{pmatrix}_{4 \times 2}, \\ L &= \begin{pmatrix} 0 & 1/\tau_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\tau_2^2 \end{pmatrix}_{2 \times 4}, \end{aligned}$$

а модельное управление имеет прежний вид (117), где для обычного скользящего режима $i = 0$.

Применяя методику раздела 5, получаем систему скользящего режима (59) в координатах $x, \eta, \Delta x$ на гиперплоскости S (16)

$$S(s = C^1(t)x_g + C^2(t)\eta + C^3(t)\Delta x = 0), \quad (131)$$

где $C^1 = (C_1^1(t), C_2^1(t))$, $C^2 = (C_1^2(t), C_2^2(t), C_3^2(t), C_4^2(t))$, $C^3 = (C_1^3, C_2^3)$, в виде

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \{\cdot\}_1, \\ \dot{\eta} &= G\eta + Hx, \\ \Delta\dot{x} &= L[G\eta + Hx],\end{aligned}\tag{132}$$

где

$$\begin{aligned}\{\cdot\}_1 &= \{E - B_0^M [C^1 B_0^M]^{-1} C^1\} (f_0^M + \Delta D^2 \Delta F) - B_0^M [C^1 B_0^M]^{-1} \times \\ &\times \{\dot{C}^1(x + \Delta x) + C^1[L(G\eta + Hx)] + \dot{C}^2\eta + C^2[G\eta + Hx] + \dot{C}^3\Delta x + \\ &+ C^3[L(G\eta + Hx)], C^1(t)(x + \Delta x) + C^2(t)\eta(t) + C^3(t)\Delta x = 0, \\ &(y_\theta \in S(16)).\end{aligned}$$

Рассмотрим сначала случай $\Delta D^2 \Delta F \equiv 0$ (т. е. нет недопоставок оборотных фондов $\Delta \mathcal{G}$), когда возможно тождественное воспроизведение модельного движения (130) в «обычном» (одношаговом) скользящем режиме на подвижной гиперплоскости S (16), (131). Применяя, например, систему (67), получаем следующие уравнения для определения строк C^1, C^2, C^3 :

$$\dot{C}_1^1 = (C_1^1, C_2^1; C_1^2, C_2^2, C_3^2, C_4^2; C_1^3, C_2^3) A^1, \tag{133}$$

где $A^1 = (r_1 / x_{M\theta 1}, \dots, r_q / x_{M\theta 1})^T$, $A^j = 0$, $j = \overline{2, q}$; $q = 2n + r = 8$;

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ r_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_M + \frac{1}{\tau_1^2}(\eta_{M1} - \frac{6}{\tau_1}\eta_{M2} - 12\tau_1 q_M) \\ -\rho_0 y_M + \frac{1}{\tau_1^2}(\eta_{M3} - \frac{6}{\tau_2}\eta_{M4} - 12\tau_2 y_M) + \eta_0 u_M \\ -\frac{12}{\tau_1}\eta_{M2} \\ \eta_{M1} - \frac{6}{\tau_1}\eta_{M2} - 12\tau_1 q_M \\ -\frac{12}{\tau_2}\eta_{M4} \\ \eta_{M3} - \frac{6}{\tau_2}\eta_{M4} - 12\tau_2 y_M \\ \frac{1}{\tau_1^2}(\eta_{M1} - \frac{6}{\tau_1}\eta_{M2} - 12\tau_1 q_M) \\ \frac{1}{\tau_1^2}(\eta_{M3} - \frac{6}{\tau_2}\eta_{M4} - 12\tau_2 y_M) \end{pmatrix};$$

$R = Ay_{M\theta}$; $A = (A^1, \dots, A^q)$; коэффициенты $C_2^1; C_1^2, C_2^2, C_3^2; C_4^2; C_1^3; C_2^3$ являются постоянными и удовлетворяют вместе с $C_1^1(t)$ условию (64)

$$\begin{aligned}C_1^1(t_0)(x_1(t_0) + \Delta x_1(t_0)) + C_2^1(x_2(t_0) + \Delta x_2(t_0)) + C_1^2\eta_1(t_0) + C_2^2\eta_2(t_0) + \\ C_3^2\eta_3(t_0) + C_4^2\eta_4(t_0) + C_1^3\Delta x_1(t_0) + C_2^3\Delta x_2(t_0) = 0.\end{aligned}$$

Начальные условия в системах (128) и (130) должны согласно требованию (61) совпадать.

Найдём разрывное управление u , приводящее систему (128) в скользящий режим на подвижной гиперплоскости S (131). Согласно методике раздела 7 для управления $u = u_0 + u_\Delta$ получаем следующие выражения u_0 (80) и u_Δ (82):

$$u_0 = \frac{1}{C_2^1 \eta_0} \{ \kappa_g g + \kappa_s s - \{ \dot{C}_1^1 q_g + (C_1^1(t) - C_2^1 \rho_0(t)) y + \frac{C_1^1(t)}{\tau_1^2} (\eta_1 - \frac{6}{\tau_1} \eta_2 - 12\tau_1 q) + \frac{C_2^1}{\tau_2^2} (\eta_3 - \frac{6}{\tau_2} \eta_4 - 12\tau_2 y) - C_1^2 \frac{12}{\tau_1} \eta_2 + C_2^2 (\eta_1 - \frac{6}{\tau_1} \eta_2 - 12\tau_1 q) - C_3^2 \frac{12}{\tau_2} \eta_4 + C_4^2 (\eta_3 - \frac{6}{\tau_2} \eta_4 - 12\tau_2 y) + \frac{C_1^3(t)}{\tau_1^2} (\eta_1 - \frac{6}{\tau_1} \eta_2 - 12\tau_1 q) + \frac{C_2^3}{\tau_2^2} (\eta_3 - \frac{6}{\tau_2} \eta_4 - 12\tau_2 y) \} \}$$

где, например, $g = q_g$, и

$$u_\Delta = \frac{1}{C_2^1 \eta_0} \sum_{j=1}^6 u_\Delta^j, \quad (135)$$

где

$$\begin{aligned} u_\Delta^1 &= \kappa^1 C_2^1, \\ \text{sign}(1 + \frac{\Delta\eta}{\eta_0}) \kappa^{1\pm} &\begin{cases} < \inf_{\Delta\eta, \Delta\rho y} (-\Delta\rho y / |1 + \Delta\eta / \eta_0|) & \text{нпу} \quad sC_2^1(t) > 0; \\ > \sup_{\Delta\eta, \Delta\rho y} (-\Delta\rho y / |1 + \Delta\eta / \eta_0|) & \text{нпу} \quad sC_2^1(t) \leq 0; \end{cases} \\ u_\Delta^2 &= u_\Delta^3 = u_\Delta^4 = u_\Delta^6 = 0; \\ u_\Delta^5 &= \kappa^5 C_2^1 \eta_0, \\ \text{sign}(1 + \frac{\Delta\eta}{\eta_0}) \kappa^{5\pm} &\begin{cases} < \inf_{\Delta\eta} (-\frac{\Delta\eta / \eta_0}{|1 + \Delta\eta / \eta_0|}) & \text{нпу} \quad sC_2^1 \eta_0 u_0 > 0; \\ > \sup_{\Delta\eta} (-\frac{\Delta\eta / \eta_0}{|1 + \Delta\eta / \eta_0|}) & \text{нпу} \quad sC_2^1 \eta_0 u_0 \leq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Векторы $x, \eta, \Delta x$ находятся по модели (130).

Рассмотрим теперь случай, когда $\Delta D^2 \Delta F \neq 0$. По методике разделов 5 и 7, задавая гиперплоскость скольжения в системе (128) в виде S (90)

$$S(s = c^1(t) x_g = 0), \quad x_g = x + \Delta x, \quad c^1 = (c_1^1, c_2^1), \quad (136)$$

получаем для управления $u = u_0 + u_\Delta$ на многошаговом скользящем режиме следующие уравнения и выражения для определения строки $c^1(t) = (c_1^1(t), c_2^1(t))$ (замечание 4 раздела 5, либо частный случай системы (133) при $c^2 = (0, 0, 0, 0)$, $c^3 = (0, 0)$) и составляющих u_0 (96), u_Δ (97) (раздел 7):

$$\dot{C}^1 = -C^1 A^1, \quad (137)$$

где

$$\begin{aligned}
A^1 &= (r_1 / q_{M6}, r_2 / q_{M6})^T = \frac{1}{q_{M6}} (y_M + \frac{1}{\tau_1^2} (\eta_{M1} - \frac{6}{\tau_1} \eta_{M2} - 12\tau_1 q_M), \\
&- \rho_0 y_M + \frac{1}{\tau_2^2} (\eta_{M3} - \frac{6}{\tau_2} \eta_{M4} - 12\tau_2 y_M) + \eta_0 U_M^i)^T, \quad C_2^1 = const, \\
C_1^1(t_i)(q(t_i) + \Delta q(t_i)) + C_2^1(y(t_i) + \Delta y(t_i)) &= 0, \\
q_M(t_i) &= q(t_i), \quad y_M(t_i) = y(t_i); \quad \eta_{Mj}(t_i) = \eta_j(t_i), \quad j = \overline{1,4}; \\
\Delta q_M(t_i) &= \Delta q(t_i), \quad \Delta y_M(t_i) = \Delta y(t_i), \quad i = \overline{0, k-1};
\end{aligned}$$

управления u_M^i находятся по формуле (117);

$$\begin{aligned}
u_0 &= \frac{1}{C_2^1 \eta_0} \{ \kappa_g g + \kappa_s s - C_1^1 [y_M + \frac{1}{\tau_1^2} (\eta_{M1} - \frac{6}{\tau_1} \eta_{M2} - 12\tau_1 q_M)] - \\
&- C_2^1 [-\rho_0 y_M + \frac{1}{\tau_2^2} (\eta_{M3} - \frac{6}{\tau_2} \eta_{M4} - 12\tau_2 y_M)] \}, \quad (138)
\end{aligned}$$

где, например, $g = q_6$;

$$u_\Delta = \frac{1}{C_2^1 \eta_0} \sum_{j=1}^9 u_\Delta^j, \quad (139)$$

где

$$u_\Delta^1 = \kappa^1 C_2^1,$$

$$\text{sign}(1 + \frac{\Delta \eta}{\eta_0}) \kappa^{1+} \begin{cases} < \inf_{\Delta \rho, \Delta \eta, y} (\Delta \rho y / |1 + \frac{\Delta \eta}{\eta_0}|) \quad \text{npu} \quad sc_2^1 > 0; \\ > \sup_{\Delta \rho, \Delta \eta, y} (\Delta \rho y / |1 + \frac{\Delta \eta}{\eta_0}|) \quad \text{npu} \quad sc_2^1 \leq 0; \end{cases}$$

$$u_\Delta^2 = u_\Delta^3 = u_\Delta^6 = u_\Delta^8 = u_\Delta^9 = 0;$$

$$\begin{aligned}
u_\Delta^4 &= \sum_{k=1}^4 u_{\Delta k}^4, \quad \begin{cases} u_{\Delta 1}^4 = \kappa_1^4 \frac{c_1^1}{\tau_1^2}, \quad u_{\Delta 2}^4 = \kappa_2^4 (-\frac{6c_1^1}{\tau_1^3}), \\ u_{\Delta 3}^4 = \kappa_3^4 \frac{c_2^1}{\tau_1^2}, \quad u_{\Delta 4}^4 = \kappa_4^4 (-\frac{6c_2^1}{\tau_1^3}), \end{cases} \\
\text{sign}(1 + \frac{\Delta \eta}{\eta_0}) \kappa_1^{4+} \begin{cases} < \inf_{z_1^2, \Delta \eta} (-z_1^2 / |1 + \frac{\Delta \eta}{\eta_0}|) \quad \text{npu} \quad sc_1^1 / \tau_1^2 > 0; \\ > \sup_{z_1^2, \Delta \eta} (-z_1^2 / |1 + \frac{\Delta \eta}{\eta_0}|) \quad \text{npu} \quad sc_1^1 / \tau_1^2 \leq 0; \end{cases} \\
\text{sign}(1 + \frac{\Delta \eta}{\eta_0}) \kappa_2^{4+} \begin{cases} < \inf_{z_2^2, \Delta \eta} (-z_2^2 / |1 + \frac{\Delta \eta}{\eta_0}|) \quad \text{npu} \quad s(-c_1^1 6 / \tau_1^3) > 0; \\ > \sup_{z_2^2, \Delta \eta} (-z_2^2 / |1 + \frac{\Delta \eta}{\eta_0}|) \quad \text{npu} \quad s(-c_1^1 6 / \tau_1^3) \leq 0; \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned} & \text{sign}\left(1 + \frac{\Delta\eta}{\eta_0}\right) \kappa_3^{4+} \left\{ \begin{aligned} & < \inf_{z_3^2, \Delta\eta} (-z_3^2 / |1 + \frac{\Delta\eta}{\eta_0}|) \quad n_{pu} \quad s(c_2^1 / \tau_1^2) > 0; \\ & > \sup_{z_3^2, \Delta\eta} (-z_3^2 / |1 + \frac{\Delta\eta}{\eta_0}|) \quad n_{pu} \quad s(c_2^1 / \tau_1^2) \leq 0; \end{aligned} \right. \\ \\ & \text{sign}\left(1 + \frac{\Delta\eta}{\eta_0}\right) \kappa_4^{4+} \left\{ \begin{aligned} & < \inf_{z_4^2, \Delta\eta} (-z_4^2 / |1 + \frac{\Delta\eta}{\eta_0}|) \quad n_{pu} \quad s(-c_2^1 6 / \tau_2^3) > 0; \\ & > \sup_{z_4^2, \Delta\eta} (-z_4^2 / |1 + \frac{\Delta\eta}{\eta_0}|) \quad n_{pu} \quad s(-c_2^1 6 / \tau_2^3) \leq 0; \end{aligned} \right. \\ \\ & u_{\Delta}^5 = \sum_{k=1}^2 u_{\Delta k}^5, \quad u_{\Delta 1}^5 = \kappa_1^5 \left(-\frac{12C_1^1}{\tau_1}\right), \quad u_{\Delta 2}^5 = \kappa_2^5 \left(-\frac{12C_2^1}{\tau_2}\right), \\ \\ & \text{sign}\left(1 + \frac{\Delta\eta}{\eta_0}\right) \chi_1^{5+} \left\{ \begin{aligned} & < \inf_{z_1^1, \Delta\eta} (-z_1^1 / |1 + \frac{\Delta\eta}{\eta_0}|) \quad n_{pu} \quad s(-12c_1^1 / \tau_1) > 0; \\ & > \sup_{z_1^1, \Delta\eta} (-z_1^1 / |1 + \frac{\Delta\eta}{\eta_0}|) \quad n_{pu} \quad s(-12c_1^1 / \tau_1) \leq 0; \end{aligned} \right. \\ \\ & \text{sign}\left(1 + \frac{\Delta\eta}{\eta_0}\right) \chi_2^{5+} \left\{ \begin{aligned} & < \inf_{z_2^1, \Delta\eta} (-z_2^1 / |1 + \frac{\Delta\eta}{\eta_0}|) \quad n_{pu} \quad s(-12c_2^1 / \tau_2) > 0; \\ & > \sup_{z_2^1, \Delta\eta} (-z_2^1 / |1 + \frac{\Delta\eta}{\eta_0}|) \quad n_{pu} \quad s(-12c_2^1 / \tau_2) \leq 0; \end{aligned} \right. \\ \\ & u_{\Delta}^7 = \kappa^7 C_2^1 u_0; \\ \\ & \text{sign}\left(1 + \frac{\Delta\eta}{\eta_0}\right) \kappa^{7+} \left\{ \begin{aligned} & < \inf_{\Delta\eta} (-\Delta\eta / |1 + \frac{\Delta\eta}{\eta_0}|) \quad n_{pu} \quad sc_2^1 u_0 > 0; \\ & > \sup_{\Delta\eta} (-\Delta\eta / |1 + \frac{\Delta\eta}{\eta_0}|) \quad n_{pu} \quad sc_2^1 u_0 \leq 0; \end{aligned} \right.
 \end{aligned}
 \end{aligned}$$

В управлении u_{Δ} учтено, что в $N(\Lambda_6, z^1)$ (98) $a_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a_{\Lambda} = (0,0)$,

$\Lambda_6 = \Delta\eta / \eta_0$, $\Lambda_2 = 0$ и, следовательно, $N(\Lambda_6, z^1) = \Lambda_6 = \Delta\eta / \eta_0$.

При введении релейной добавки

$$u_P = \delta \operatorname{sign} s, \quad \delta < 0,$$

в управление u , необходимо в u_{Δ}^7 подставлять вместо u_0 сумму $u_0 + u_P$.

Заключение

Таким образом, получены следующие новые результаты.

1. Метод вывода уравнений скользящего режима, условия их инвариантности к определённому классу неопределённых возмущений и к отличиям от модельной системы и метод многошагового построения подвижного многообразия скольжения для воспроизведения с заданной точностью желаемого модельного движения в условиях ограниченных неопределённых ошибок измерений, когда точная информация о состоянии системы известна лишь с определённым тактом, в начале шагов построения управления.

2. Метод построения разрывного векторного управления с неопределёнными погрешностями измерений, приводящего систему управления в скользящий режим на подвижном многообразии скольжения в условиях неопределённых возмущений без прямого использования точной информации о состоянии (а лишь опосредованно, в начале шагов и через вычисляемые значения переменных коэффициентов многообразия скольжения) и основанный на линеаризации правой части системы относительно вычисляемого вектора состояния в результате её разложения в ряд Тейлора по степеням составляющих вектора неопределённых погрешностей измерений.

3. Получены уравнения скользящего режима на подвижном многообразии, формируемом с учётом уравнений и показаний датчиков, показана инвариантность скользящего режима к прежнему классу неопределённых возмущений и отличий от модели и возможность тождественного воспроизведения модельных движений с начального момента времени $t = t_0$ при отсутствии других возмущений и отличий. Получен метод формирования матрицы такого подвижного многообразия скольжения. Информация о векторе состояния системы и его производных требуется для формирования разрывного управления только в начальный момент времени, так как далее она может быть получена и по модельной системе в силу тождественного воспроизведения её движения. Других отличий в подходе к формированию разрывного управления от подходов при полной информации в данном случае не имеется. Алгоритм разрывного управления и его реализация при учёте динамики датчиков усложняется.

4. При наличии неопределённых возмущений и отличий, не удовлетворяющих условиям инвариантности при учёте уравнений и показаний датчиков, предлагается многошаговый скользящий режим с построением многообразия скольжения в начале каждого шага разбиения исходного промежутка времени. Показано, что для обеспечения заданной точности воспроизведения модельного движения информация о векторе состояния системы понадобится уже не только в начальный момент, но и в начале каждого шага. Так как на шагах использование такой информации не предполагается, то для формирования разрывного управления, приводящего систему в скользящий режим, и подвижного многообразия скольжения применяется только вычисляемый вектор состояния. С учётом малости неопределённых отклонений движение от модельного нелинейности линеаризуются относительно модельного движения, что позволяет использовать в построении управления и вектор состояния модельной системы. Отклонения являются в данном случае дополнительными ограниченными неопределёнными возмущениями, действие которых на процесс приведения в скользящий режим компенсируется.

5. Показано применение полученных методов управления для вывода АСЭО на заданную мощность в условиях неопределённых возмущений и неопределённых погрешностей измерений, вызванных неопределёнными по величине чистыми запаздываниями в передаче и обработке информации о состоянии системы, а также в условиях неопределённых возмущений, но при известных чистых запаздываниях. Решены задачи воспроизведения модельных движений с заданной точностью на

многошаговых и тождественного воспроизведения на одношаговых скользящих режимах соответственно в условиях неопределённых величин чистого запаздывания, неопределённых потоков основных и оборотных фондов и в условиях известных величин чистого запаздывания и неопределённости только в потоке основных фондов.

Публикация осуществлена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан в рамках научного проекта 18-48-160042.

1. Мещанов А.С., Севрюгин С.Ю., Зарипова А.Ф. Синтез скользящих режимов в системах с неопределёнными возмущениями и погрешностями в измерениях. *Авиационная техника*. 2014, №1 С. 47-53.
2. Мещанов А.С., Гатауллина Л.А., Туктаров Э.А. Синтез скользящих режимов при ограниченных неопределённых погрешностях измерений и возмущениях. *Наука и современное общество: взаимодействие и развитие. Материалы V Международной научно-практической конференции.* г.Уфа, 15-16 декабря, 2018 г. С.50-64.
3. Зайдель А.Н. Погрешности измерений физических величин. Л.: Наука, 1985, 112 с.
4. РМГ 29-99 ГСИ. Метрология. Основные термины и определения. Официальное издание. М.: ИПК. Издательство стандартов, 2000, 46 с.
5. Уткин В.И. Скользящие режимы и их применение в системах с переменной структурой. М. : Наука, 1974 - 275 с.
6. Катковник В.Я., Полуэктов В.А. Многомерные дискретные системы управления. М. : Наука, 1966, - 416 с.
7. Бонч - Бруевич А.М., Быков В.А., Чинаев А.И. Бесконтактные элементы самонастраивающихся систем. М.: Машиностроение, 1968, - 92 с.
8. Афанасьев В.А., Мещанов А.С., Сиразетдинов Т.К. Многошаговое терминальное управление системами при неопределённости с учётом ограничений. *Кибернетика и вычислительная техника*, 1987, вып. 73, с. 79 - 86.
9. Мещанов А.С. Разрывное управление манипуляторами летательного аппарата, *Изв.вузов. Авиационная техника*, № 3, с. 28 - 31.
10. Мещанов А.С. О приведении в скользящий режим многомерных разрывных систем с нелинейным нестационарным объектом. // *Устойчивость движения*. - Новосибирск, 1985, - с. 230 - 234.
11. Рафиков М.М., Сиразетдинов Т.К. К задаче агрегирования системы экономических объектов по конечной продукции производства. *Изв.вузов, Авиационная техника*, 1971, №1, с. 95 - 100.

Тащилин Л.Н.

Место гидро - и пневмоприводов в современной технике

*ВКА имени А.Ф. Можайского
(Россия, Санкт-Петербург)*

doi: 10.18411/sr-10-02-2020-03

idsp: sciencerussia-10-02-2020-03

Аннотация

В статье рассмотрены области применения, круг задач, решаемых с применением гидро - и пневмоприводов, а также их достоинства и недостатки.

Ключевые слова: гидропривод, пневмопривод, система управления, бесступенчатое регулирование, гидромотор, гидропневмоавтоматика, мехатронные модули.

Abstract

The article considers the scope of application, the range of tasks solved with the use of hydro - and pneumatic actuators, as well as their advantages and disadvantages.

Keywords: hydraulic drive, pneumatic drive, control system, stepless control, hydraulic motor, hydropneumautomatics, mechatronic modules