Аксенюшкина Е.В.
Оптимальная финансовая политика фирмы

*Байкальский государственный университет
(Россия, Иркутск)*

doi:10.18411/spc-8-12-2017-02

idsp: 000001:spc-8-12-2017-02

В статье формулируется и решается задача о формировании кредитной политики фирмы и таком распределении прибыли на инвестиции (процентный рост) и потребление (дивиденды), чтобы обеспечить максимальный объем потребления за некоторый период планирования. Рассматривается ситуация, когда некоторая фирма (например, банк) осуществляет свою деятельность на кредитно-финансовом рынке. Поясним механизм этой деятельности. Фирма имеет некоторый собственный капитал (собственные средства), который складывается из средств владельцев фирмы, накопленных за период существования. Далее фирма может привлекать средства клиентов, например, в виде вкладов, по некоторой процентной ставке, неся при этом расходы по выплате процентов за использование этих средств. Итак, имея в своем распоряжении собственные и привлеченные средства, фирма может разместить их (к примеру, в качестве выдаваемых кредитов) по существующей процентной ставке, получая, тем самым, некоторый доход.

Описанная ситуация формализуется в рамках билинейной задачи оптимального управления. В таких задачах, вообще говоря, принцип максимума является только необходимым условием оптимальности и выделяет экстремальные управления, которые подозрительны на оптимальность. С учетом специфики задачи показывается, что управления, удовлетворяющие принципу максимума, являются сильно экстремальными, что согласно известным достаточным условиям обеспечивает их оптимальность. В результате рассматриваемая билинейная задача полностью решается на основе принципа максимума.

Поставим задачу оптимального планирования со следующими переменными:

$t \in [0, T]$ – время;

$x(t)$ – собственные средства фирмы в момент времени t , которые могут быть использованы на инвестиции и потребление;

$y(t)$ – привлеченные средства (например, кредит) в момент времени t ;

$r_1 \in (0, 1]$ – процентная ставка по инвестициям;

$r_2 \in (0, 1]$ – процентная ставка по привлечению средств;

$v(t) \in [0, 1]$ – доля собственных средств, идущая на инвестиции в момент времени t ;

$u(t) \in [0, 1]$ – отношение привлеченных средств к собственным в момент t (объем привлеченных средств не превосходит собственные)

$$u(t) = \frac{y(t)}{x(t)}.$$

Тогда величину $x(t)$ можно представить в виде (кредит $y(t)$ расходуется только на инвестиции после уплаты процентов)

$$x(t) = x(0) + r_1 \int_0^t x(\tau) v(\tau) d\tau + r_1 \left(\int_0^t y(\tau) d\tau - r_2 \int_0^t y(\tau) d\tau \right) =$$

$$= x(0) + r_1 \int_0^t x(\tau)v(\tau)d\tau + r_1(1-r_2) \int_0^t x(\tau)u(\tau)d\tau.$$

Обозначим $r = r_1$, $c = 1 - r_2$, $0 < c < 1$. Следовательно, собственные средства фирмы можно записать в виде

$$x(t) = x(0) + r \int_0^t x(\tau)[v(\tau) + cu(\tau)]d\tau.$$

В результате дифференцирования получаем фазовое уравнение

$$\dot{x} = r(cu + v)x$$

с начальным условием $x(0) = x_0$.

Сформируем целевой функционал, подлежащий максимизации:

$$\Phi(u, v) = \int_0^T (1 - v(t))x(t)dt - \int_0^T u(t)x(t)dt.$$

По содержательному смыслу это разность между собственными средствами фирмы, направленными на потребление, и привлеченными средствами за период $[0, T]$.

Примем предположение об обесценивании со временем капитала фирмы. Пусть $\rho > 0$ – параметр дисконтирования, причем $\rho < r$. Тогда с учетом фактора обесценивания средств, запланированных на потребление, целевой функционал примет окончательный вид

$$\Phi(u, v) = \int_0^T e^{-\rho t} (1 - u(t) - v(t))x(t)dt.$$

В результате приходим к задаче оптимального управления на максимум потребления

$$\Phi(u, v) = \int_0^T e^{-\rho t} (1 - u - v)x dt \rightarrow \max,$$

$$\dot{x} = r(cu + v)x, \quad x(0) = x_0,$$

$$u(t) \in [0, 1], \quad v(t) \in [0, 1],$$

$$x_0 > 0, \quad \rho > 0, r \in (0, 1], \rho < r, \quad c \in (0, 1).$$

Проведем анализ задачи на основе принципа максимума.

Составим функцию Понтрягина

$$\begin{aligned} H(\psi, x, u, v) &= \psi r(cu + v)x + (1 - u - v)x = \\ &= H_u(\psi, x)u + H_v(\psi, x)v + x \end{aligned}$$

и сопряженное уравнение

$$\dot{\psi} = \rho\psi - H_x = (1 - \psi rc)u + (1 - \psi r)v + \rho\psi - 1$$

с условием $\psi(T) = 0$.

Максимизирующее управления в поставленной задаче можно записать по формуле

$$u^*(\psi) = \begin{cases} 0, & \psi rc - 1 \leq 0; \\ 1, & \psi rc - 1 > 0; \end{cases}$$

$$v^*(\psi) = \begin{cases} 0, & \psi r - 1 \leq 0 \\ 1, & \psi r - 1 > 0. \end{cases}$$

Рассмотрим задачу Коши для сопряженного уравнения

$$\dot{\psi} = \psi(\rho - r(cu^* + v^*)) + (u^* + v^* - 1), \quad \psi(T) = 0$$

с управлениями

$$u^* = u^*(\psi), \quad v^* = v^*(\psi).$$

Пусть $\psi(t)$, $t \in [0, T]$ – решение этого уравнения. Тогда управления $u^*(\psi(t))$, $v^*(\psi(t))$, $t \in [0, T]$ являются оптимальными в поставленной задаче.

Введем гладкие функции переключения, по которым будем отслеживать поведение управлений

$$s_1(t) = \psi(t)rc - 1, \quad s_2(t) = \psi(t)r - 1.$$

Заметим, что при $r \in (0, 1]$, $c \in (0, 1)$ возможны ситуации

- если $\psi(t) > 0$, то $\psi(t)rc - 1 < \psi(t)r - 1 \Leftrightarrow s_1(t) < s_2(t)$;
- если $\psi(t) < 0$, то $\psi(t)rc - 1 > \psi(t)r - 1 \Leftrightarrow s_1(t) > s_2(t)$.

Начнем движение влево из терминальной точки T . Поскольку $\psi(T) = 0$, то $s_1(T) = s_2(T) = -1$. Это означает, что $u^*(\psi(T)) = 0$, $v^*(\psi(T)) = 0$.

Следовательно, для $t \in (T - \varepsilon, T)$, $\varepsilon > 0$ имеем $s_1(t) < 0$, $s_2(t) < 0$. Отсюда вытекает, что $u^*(t) = 0$, $v^*(t) = 0$.

Подставляя в $\dot{\psi}$ -уравнение, получаем

$$\dot{\psi} = \psi\rho - 1, \quad \psi(T) = 0.$$

Решением этого уравнения является функция

$$\psi(t) = \frac{1}{\rho}(1 - e^{\rho(t-T)}), \quad t \in (T - \varepsilon, T].$$

Продифференцируем полученное решение

$$\dot{\psi}(t) = \frac{1}{\rho}(-\rho)e^{\rho(t-T)} = -e^{\rho(t-T)} < 0, \quad t \in (T - \varepsilon, T].$$

Отсюда следует, что функция $\psi(t)$ – монотонно убывает на $(T - \varepsilon, T]$. Это означает, что $\psi(t) > 0 \Rightarrow s_1(t) < s_2(t)$, $t \in (T - \varepsilon, T]$.

Таким образом, при движении по t влево из T первой обратится в нуль функция $s_2(t)$.

Решим уравнение $s_2(t) = 0$, т.е.

$$\frac{r}{\rho}(1 - e^{\rho(t-T)}) - 1 = 0.$$

В результате получена точка

$$\theta_1 = T + \frac{\ln\left(1 - \frac{\rho}{r}\right)}{\rho}.$$

Убедимся в «правильности» найденной точки. Поскольку $1 - \frac{\rho}{r} \in (0, 1)$

(исходное условие $\rho < r$), то $\ln\left(1 - \frac{\rho}{r}\right) < 0$.

Следовательно $\theta_1 < T$. Отметим также, что $\psi(\theta_1) = \frac{1}{r}$.

Рассмотрим особый случай.

Пусть $\theta_1 \leq 0$. Это означает, что $T \leq \frac{1}{\rho} \left| \ln\left(1 - \frac{\rho}{r}\right) \right|$ (случай краткосрочного планирования). Тогда

$$s_1(t) < 0, \quad t \in [0, T], \quad s_2(t) < 0, \quad t \in (0, T].$$

Следовательно, оптимальное управление в таком случае имеет вид

$$u^*(t) = 0, \quad v^*(t) = 0, \quad t \in [0, T].$$

Пусть $\theta_1 > 0$. Тогда справедливо $s_1(\theta_1) < 0$, $s_2(\theta_1) = 0$.

Предположим, что $s_2(t) > 0$, $t \in (\theta_1 - \varepsilon, \theta_1)$, тогда

$$u^*(t) = 0, \quad v^*(t) = 1, \quad t \in (\theta_1 - \varepsilon, \theta_1).$$

Подставляя в ψ -уравнение, получаем

$$\dot{\psi} = \psi(\rho - r), \quad \psi(\theta_1) = \frac{1}{r}.$$

Решением этого уравнения является функция

$$\psi(t) = \frac{1}{r} e^{(r-\rho)(\theta_1-t)}, \quad t \in (\theta_1 - \varepsilon, \theta_1).$$

Заметим, что $\dot{\psi}(t) = \psi(t)(\rho - r) < 0$. Отсюда следует, что $\psi(t) > 0$, $t < \theta_1$.

Проверим предположение $s_2(t) > 0$, $t \in (\theta_1 - \varepsilon, \theta_1)$.

Согласно определению

$$s_2(t) = \psi(t)r - 1 = e^{(r-\rho)(\theta_1-t)} - 1.$$

Исследуем ее поведение. Функция $s(t) = e^{(r-\rho)(\theta_1-t)}$ монотонно убывает по $t \in [0, \theta_1]$, поскольку $\dot{s}(t) < 0$, причем $s(\theta_1) = 1$. Следовательно, $s(t) > 1$ для всех $t \in [0, \theta_1)$. Отсюда вытекает, что $s_2(t) > 0$, $t \in [0, \theta_1)$.

Поскольку $\psi(t) > 0$, $t \in [\theta_1 - \varepsilon, \theta_1]$, то $s_1(t) < s_2(t)$. Найдем решение уравнения $s_1(t) = 0$

$$ce^{(r-\rho)(T-t)} = 1.$$

В результате получена точка

$$\theta_2 = \theta_1 + \frac{\ln c}{r - \rho}.$$

Очевидно, что $\theta_2 < \theta_1$. Отметим, что $s_1(t) < 0$, $t \in (\theta_2, \theta_1)$.

Выделим *особый случай*.

Пусть $\theta_2 \leq 0$. Следовательно, $\theta_1 \leq \frac{|\ln c|}{r - \rho}$. Тогда оптимальное управление имеет

вид

$$u^*(t) = 0, \quad t \in [0, T],$$

$$v^*(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \theta_1) \\ 0, & t \in [\theta_1, T] \end{cases}.$$

Пусть $\theta_2 > 0$. Отметим, что $s_1(\theta_2) = 0$, $\psi(\theta_2) = \frac{1}{rc}$.

Предположим, что $s_1(t) > 0$, $t \in (\theta_2 - \varepsilon, \theta_2)$, тогда

$$u^*(t) = 1, \quad v^*(t) = 1, \quad t \in (\theta_2 - \varepsilon, \theta_2).$$

Решаем ψ -уравнение

$$\dot{\psi} = \psi(\rho - r(c+1)) + 1, \quad \psi(\theta_2) = \frac{1}{rc}.$$

Решением этого уравнения является функция

$$\psi(t) = e^{(\theta_2-t)(r(c+1)-\rho)} \left[\frac{1}{rc} - \frac{1}{r(c+1)-\rho} \right] + \frac{1}{r(c+1)-\rho}.$$

Проверим предположение

$$\begin{aligned} s_1(t) &= cr\psi(t) - 1 = \\ &= e^{(\theta_2-t)(r(c+1)-\rho)} \left[1 - \frac{rc}{r(c+1)-\rho} \right] + \frac{rc}{r(c+1)-\rho} - 1 = \\ &= e^{(\theta_2-t)(r(c+1)-\rho)} \left[\frac{r-\rho}{r(c+1)-\rho} \right] + \frac{\rho-r}{r(c+1)-\rho} = \\ &= \frac{r-\rho}{r(c+1)-\rho} \left(e^{(\theta_2-t)(r(c+1)-\rho)} - 1 \right). \end{aligned}$$

Так как $r - \rho > 0$ и $r(c+1) - \rho > 0$, то получим $\frac{r-\rho}{r(c+1)-\rho} > 0$.

Функция $e^{(\theta_2-t)(r(c+1)-\rho)}$, $t \in (0, \theta_2]$ в точке θ_2 равна единице и монотонно убывает, поскольку ее производная меньше нуля. Следовательно, $e^{(\theta_2-t)(r(c+1)-\rho)} > 1$.

Проверим знак функции $\psi(t)$, $t \in (0, \theta_2)$

$$\dot{\psi}(t) = e^{(\theta_2-t)(r(c+1)-\rho)} \left(\frac{\rho-r}{rc} \right) < 0,$$

$$\psi(\theta_2) = \frac{1}{rc} > 0.$$

Следовательно, $\psi(t) > 0$, $t \in (0, \theta_2)$. Тогда $s_2(t) > s_1(t) > 0$, $t \in (0, \theta_2)$.

Таким образом, знаки функций переключения $s_2(t)$, $s_1(t)$ на отрезке $[0, T]$ изменяются следующим образом:

- 1) функция $s_1(t) \begin{cases} > 0, & t \in (0, \theta_2) \\ < 0, & t \in (\theta_2, T) \end{cases}$,
- 2) функция $s_2(t) \begin{cases} > 0, & t \in (0, \theta_1) \\ < 0, & t \in (\theta_1, T) \end{cases}$.

$$\text{Здесь } \theta_1 = T + \frac{\ln(1-\frac{\rho}{r})}{\rho}, \quad \theta_2 = \theta_1 + \frac{\ln c}{r-\rho}.$$

Итоговое условие $\theta_2 > 0$ приводит к неравенству для конечного времени

$$T > \frac{\left| \ln\left(1 - \frac{\rho}{r}\right) \right|}{\rho} + \frac{|\ln c|}{r-\rho}. \text{ Это случай долгосрочного планирования.}$$

В этом случае оптимальное управление выражается по формулам

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \theta_2) \\ 0, & t \in [\theta_2, T] \end{cases},$$

$$v^*(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \theta_1) \\ 0, & t \in [\theta_1, T] \end{cases}$$

Таким образом, содержательная интерпретация оптимального управления имеет вид:

- первый период $[0, \theta_2)$ – вся прибыль идет на инвестиции, берется кредит в размере прибыли;
- второй период $[\theta_2, \theta_1)$ – вся прибыль идет на инвестиции, кредит обнуляется;
- третий период $[\theta_1, T]$ – вся прибыль идет на потребление, кредит равен нулю.

1. Антипина Н. В. Линейные функции Ляпунова-Кротова и достаточные условия оптимальности в форме принципа максимума / Н. В. Антипина, В. А. Дыхта // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2002. — № 12. — С. 11–22.

2. Аргучинцев А. В. Оптимальное управление: нелокальные условия, вычислительные методы и вариационный принцип максимума / А. В. Аргучинцев, В. А. Дыхта, В. А. Срочко // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2009. — № 1. — С. 3–43.
3. Габасов Р. Принцип максимума в теории оптимального управления / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. — М. :Либроком, 2011. — 272 с.
4. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ / Ф. Кларк. — М. : Наука, 1988. — 280 с.
5. Кротов В. Ф. Методы и задачи оптимального управления / В. Ф. Кротов, В. И. Гурман. — М. : Наука, 1973. — 446 с.
6. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. — М. : Физматлит, 1961. — 388 с.
7. Никольский М. С. О достаточности принципа максимума Понтрягина в некоторых оптимизационных задачах / М. С. Никольский // Вестник Московского университета. Сер. 15, Вычислительная математика и кибернетика. — 2005. — № 1. — С. 35–43.
8. Срочко В. А. Достаточные условия оптимальности в задачах управления на основе формул приращения функционалов / В. А. Срочко, В. Г. Антоник, Е. В. Аксеньюшкина // Известия Иркутского государственного университета. Сер. Математика. — 2014. — Т. 8. — С. 125–140.
9. Срочко В. А. Достаточные условия оптимальности экстремальных управлений на основе формул приращения функционала / В. А. Срочко, В. Г. Антоник // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2014. — № 8. — С. 96–102.
10. Срочко В. А. Итерационные методы решения задач оптимального управления / В. А. Срочко. — М. :Физматлит, 2000. — 160 с.

Апекова А.О.

Оценка вероятности банкротства по методикам адаптированным к российской экономике

*Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева
(Россия, Кемерово)*

doi:10.18411/spc-8-12-2017-03

idsp: 000001:spc-8-12-2017-03

Банкротство (несостоятельность) – признанная арбитражным судом или объявленная должником неспособность должника в полном объеме удовлетворить требования кредиторов по денежным обязательствам и (или) исполнить обязанность по уплате обязательных платежей [1].

Целью анализа вероятности банкротства является оперативное выявление близости к несостоятельности и применение необходимых мер в избежание данного состояния. Каждая из методик имеет право на существование, хоть и основываются на различных факторах. Для оценки вероятности банкротства АО «XXX» целесообразно рассмотреть следующие модели:

- методика Министерства финансов;
- четырехфакторная иркутская модель Беликова-Давыдовой;
- модель О.П. Зайцевой;
- модель Г.В. Савицкой.

Официальные методики созданы на основе отечественных нормативно-законодательных документов, при помощи методического положения по оценке финансового состояния предприятий и установлению неудовлетворительной структуры баланса (№31 от 12 августа 1994 года) можно оценить вероятность банкротства, применяя систему из трех показателей:

1. Коэффициент текущей ликвидности (L тек. ликв.):

$$L \text{ тек. лик.} = \frac{A1+A2+A3}{П1+П2}$$

$$L \text{ тек. лик.} 2015 = \frac{23714924}{7709013+20563414} = 0,84.$$

$$L \text{ тек. лик.} 2016 = \frac{26669857}{7884006+9337768} = 1,55.$$

2. Коэффициент обеспеченности собственными средствами (L об. соб. ср):

$$L \text{ об. соб. ср.} = \frac{П4-A4}{A1+A2+A3}$$