Тухлиев К.

**О совместном полиномиальном приближении функций и её производных
частичными суммами Фурье-Чебышёва***Худжандского государственного университета имени Б.Гафурова
(Таджикистан, Худжанд)*

doi:10.18411/spc-12-12-2018-03

idsp: sciencepublic-12-12-2018-03

Пусть N, R_+, R – множества соответственно натуральных, положительно действительных и действительных чисел. В этой работе получены точные неравенства типа Колмогорова [1] для наилучшего приближения действительных измеримых на отрезке $[-1, 1]$ функций f с весом $\mu(x) := 1/\sqrt{1-x^2}$ элементами подпространства P_{n-1} (алгебраических многочленов степени $\leq n-1$) в гильбертовом пространстве

$$L_{2,\mu}[-1, 1] := L_2((\sqrt{1-x^2})^{-1}; [-1, 1]) \text{ с конечной нормой } \|f\| = \left(\int_{-1}^1 \frac{f^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \right)^{1/2}.$$

Пусть $T_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, $T_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(k \arccos x)$, $k = 1, 2, \dots$ – ортонормированная система многочленов Чебышёва первого рода в пространстве $L_{2,\mu}[-1, 1]$, а

$D = (1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} - x \frac{d}{dx}$ – дифференциальный оператор второго порядка. Операторы

высших порядков определим последовательно, полагая $D^r f = D(D^{r-1} f)$, $(r = 2, 3, \dots)$. Известно [2, с.54], что многочлены Чебышёва удовлетворяют дифференциальному уравнению $(1-x^2)T_k''(x) - xT_k'(x) + k^2 T_k(x) = 0$, отсюда сразу следуют равенства $DT_k(x) = -k^2 T_k(x)$, $\dots, D^n T_k(x) = 0$, $k < n$.

Положим $L_{2,\mu}^{(0)}[-1, 1] = L_{2,\mu}[-1, 1]$. Для $r \in N$ обозначим через $L_{2,\mu}^{(2r)}[-1, 1]$ – множество функций $f \in L_{2,\mu}[-1, 1]$, у которых производная $D^r f$ принадлежит пространству $L_{2,\mu}[-1, 1]$. Пусть $\varepsilon_{n-1}(f)_{2,\mu} = \inf \{\|f - p_{n-1}\|_{2,\mu} : p_{n-1} \in P_{n-1}\}$ – наилучшее приближение функции $f \in L_{2,\mu}$ элементами подпространства P_{n-1} . В [2, с. 26] доказано, что среди всех элементов $p_n \in P_{n-1}$ частичная сумма $S_{n-1}(f, x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f) T_k(x)$ ряда Фурье-Чебышёва доставляет минимум величине $\varepsilon_{n-1}(f)_{2,\mu}$. При этом

$$\varepsilon_{n-1}(f)_{2,\mu} = \|f - S_{n-1}(f)\|_{2,\mu} = \left(\sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \right)^{1/2}.$$

При решении экстремальных задач теории приближений важную роль играют неравенства между нормами последовательных производных функций или неравенства типа Колмогорова [1] в различных банаховых пространствах. Если $S = R$ или $S = R_+$, то неравенство Колмогорова имеет вид

$$\|f^{(s)}\|_{L_p(S)} \leq M \|f\|_{L_q(S)}^\alpha \cdot \|f^{(r)}\|_{L_\gamma(S)}^\beta, \text{ где } \alpha = (r-s-1/\gamma+1/p)/(r-1/\gamma+1/q), \beta = 1-\alpha.$$

Отметим, что в работе В.В.Арестова [3] приведён обстоятельный обзор всех результатов неравенства вида Колмогорова, где получены наилучшие константы в неравенствах типа Колмогорова и указывается их связь с известной задачи Стечкина о наилучшем приближении неограниченных операторов ограниченными. Поскольку для функции $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$ её промежуточные производные $D^s f$, $s = 1, 2, \dots, r-1$ принадлежат

пространству $L_{2,\mu}$, то представляет интерес изучение поведения наилучших приближений $\varepsilon_{n-1}(D^s f)$, $s = 1, 2, \dots, r-1$ на классе $L_{2,\mu}^{(2r)}$. В [4] доказано, что при любых $n, r, s \in \mathbb{N} (n > r \geq s \geq 1)$ и для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$ справедливо точное на $L_{2,\mu}[-1,1]$ неравенство типа Колмогорова

$$\varepsilon_{n-1}(D^s f)_{2,\mu} \leq (\varepsilon_{n-1}(D^r f)_{2,\mu})^{s/r} (\varepsilon_{n-1}(f)_{2,\mu})^{1-s/r}, \quad (1)$$

которое обращается в равенство для $f_0(x) = T_n(x) \in L_{2,\mu}^{(2r)}[-1,1]$.

Через $W^{(2r)}L_{2,\mu} := W^{(2r)}L_{2,\mu}[-1,1]$ обозначим класс функций $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}[-1,1]$, у которых $\|D^r f\|_{2,\mu} \leq 1$. Положим $\varepsilon_{n-1}(W^{(2r)}L_{2,\mu})_{2,\mu} = \sup \{ \varepsilon_{n-1}(f)_{2,\mu} : f \in W^{(2r)}L_{2,\mu} \}$.

Имеет место следующая

Лемма. Справедливо равенство $\varepsilon_{n-1}(W^{(2r)}L_{2,\mu})_{2,\mu} = n^{-2r}$.

Задача совместной наилучшей полиномиальной приближении функции f и её последовательных производных $D^s f$ ($s = 1, 2, \dots, r-1$) формулируется в следующей постановке: для натуральных чисел n, r, s , удовлетворяющих условию $n > r \geq s \geq 1$ требуется найти точное значение величины

$$\sup \{ \varepsilon_{n-1}(D^s f)_{2,\mu} : f \in W^{(2r)}L_{2,\mu} \}. \quad (2)$$

Решение задачи (2) находим как следствие более общей задачи отыскания точной константы в неравенстве типа Колмогорова (1) в пространстве $L_{2,\mu}[-1,1]$.

Имеет место следующая

Теорема. При любых n, r, s для которых $n > r \geq s \geq 1$ имеет место равенство $\sup \{ \varepsilon_{n-1}(D^s f)_{2,\mu} : f \in W^{(2r)}L_{2,\mu} \} = n^{2(s-r)}$.

1. Бабенко В.Ф., Корнейчук Н.П., Кафанов В.А., Пичугов С.А. Неравенства для производных и их приложения. – Киев: Наукова думка, 2003, 590 с.
2. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1979, 416 с.
3. Арестов В.В. Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. 1996. Т.51. Вып. 6(312). С.89-124.
4. Шабозов М.Ш., Тухлиев К. Неравенства Джексона-Стечкина с обобщёнными модулями непрерывности и поперечники некоторых классов функций // Труды института математики и механики УрО РАН, 2015, Т.21, №4, С. 292-308.