Тухлиев К.

Точные константы в неравенствах Джексона для функций из дифференцируемых в смысле Вейля*Худжандского государственного университета имени Б.Гафурова
(Таджикистан, Худжанд)*

doi:10.18411/spc-12-12-2018-02

idsp: sciencepublic-12-12-2018-02

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+ \equiv \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_+ := (0, +\infty)$ – множества соответственно всех натуральных, целых неотрицательных, положительно действительных чисел. $L_2 \equiv L_2[0, 2\pi]$ – пространство измеримых по Лебегу 2π -периодических функций, у

которых норма
$$\|f\|_{L_2} := \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty.$$

В последнее время при решении экстремальных задач теории аппроксимации функций часто используют модуля непрерывности, определяемых с помощью

оператором Стеклова (см., напр. [1])
$$S_h(f, x) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f(x+t) dt, \quad h > 0.$$

Полагаем, что $S_{h,i}(f) \stackrel{\text{def}}{=} S_h(S_{h,i-1}(f))$, где $i \in \mathbb{N}$ и $S_{h,0}(f) \equiv f$. Обозначив через I – единичный оператор в L_2 , определим конечные разности первого и высших порядков:
$$\Delta_h^m(f, x) = \sum_{i=0}^m (-1)^{m-i} \binom{m}{i} S_{h,i}(f, x), \quad m = 2, 3, 4, \dots$$

Введём следующую характеристику гладкости функции $f \in L_2$

$$\Omega_m(f, t) \stackrel{\text{def}}{=} \sup \{ \|\Delta_h^m(f)\| : 0 < h \leq t \},$$

которую назовём *обобщённым модулем непрерывности m -го порядка*.

Полученные в этой работе результаты связаны с определением дробной производной в смысле Вейля [2]. Рассмотрим для функции $f \in L_2$ с рядом Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx),$$

производную порядка $\alpha \geq 0$ в смысле Вейля, определённую равенством

$$f^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^\alpha \left\{ a_k \cos \left(kx + \frac{\alpha\pi}{2} \right) + b_k \sin \left(kx + \frac{\alpha\pi}{2} \right) \right\}.$$

Через $L_2^{(\alpha)}$ ($\alpha \geq 0$, $L_2^{(0)} \equiv L_2$) обозначим множество функций $f \in L_2$, у которых существует производная в смысле Вейля $f^{(\alpha)} \in L_2$ ($\alpha \geq 0$). Если $s_{n-1}(f^{(\alpha)}, x)$ ($\alpha \geq 0$) – частичная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции $f^{(\alpha)}$, то легко доказать, что наилучшее приближение функции $f^{(\alpha)} \in L_2$ тригонометрическими полиномами T_{n-1} степени не выше $n-1$ имеет вид

$$E_{n-1}(f^{(\alpha)}) = \inf \left\{ \|f^{(\alpha)} - T_{n-1}\| : T_{n-1} \in \mathfrak{T}_{2n-1} \right\} = \\ = \|f^{(\alpha)} - s_{n-1}(f^{(\alpha)})\| = \left(\sum_{k=n}^{\infty} k^{2\alpha} \rho_k^2(f) \right)^{1/2},$$

где $\rho_k^2(f) = a_k^2(f) + b_k^2(f)$, $k \in \mathbb{N}$, $a_k(f), b_k(f)$ — косинус- и синус-коэффициенты функции f . Всюду, далее полагаем $\text{sinc } t := \begin{cases} \frac{\sin t}{t}, & \text{если } t \neq 0; \\ 1, & \text{если } t = 0 \end{cases}$.

Вводим в рассмотрение экстремальную характеристику

$$\chi_{n,\alpha,p}(\Omega_m, q, h) = \sup_{\substack{f \in L_2^{(\alpha)} \\ f \neq \text{const}}} \frac{E_{n-1}(f)}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(f^{(\alpha)}, t) q(t) dt \right)^{1/p}},$$

где $m, n \in \mathbb{N}$, $\alpha \geq 0$, $p \in \mathbb{R}_+$, $0 < h \leq \pi/n$, $q \geq 0$ — весовая функция на отрезке $[0, h]$.

В работе [3] доказана следующее общее утверждение.

Теорема А. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \geq 0$, $0 < p \leq 2$, $0 < h \leq \pi/n$, $n \in \mathbb{N}$ q — весовая функция на отрезке $[0, h]$. Тогда справедливы неравенства

$$\{A_{n,m,\alpha,p}(q, h)\}^{-1} \leq \chi_{n,\alpha,p}(\Omega_m, q, h) \leq \left\{ \inf_{n \leq k < \infty} A_{k,m,\alpha,p}(q, h) \right\}^{-1}, \quad (1)$$

где
$$A_{k,m,\alpha,p}(q, h) = \left(k^{\alpha p} \int_0^h (1 - \text{sinc } kt)^{mp} q(t) dt \right)^{1/p}, \quad k \geq n.$$

В связи с утверждением теоремы А возникает естественный вопрос: выяснить условия, при выполнении которых будет иметь место соотношение

$$\inf_{n \leq k < \infty} A_{k,m,\alpha,p}(q, h) = A_{n,m,\alpha,p}(q, h), \quad (2)$$

равносильное задаче о точности двустороннего неравенства (1). На этот вопрос ответ даёт следующие утверждение.

Теорема. Пусть q — весовая функция на отрезке $[0, h]$ ($0 < h \leq \pi/n$, $n \in \mathbb{N}$) является дифференцируемой. Если при некотором $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\alpha \geq 1$, $1/\alpha \leq p \leq 2$ и любых $t \in (0, h)$ выполнено дифференциальное неравенство

$$(\alpha p - 1) q(t) - tq'(t) \geq 0,$$

то справедливо соотношение (2) и, следовательно,

$$\chi_{n,\alpha,p}(\Omega_m, q, h) = \frac{1}{n^{\alpha}} \left(\int_0^h (1 - \text{sinc } nt)^{mp} q(t) dt \right)^{-1/p}.$$

1. Тухлиев К. Наилучшие приближения и поперечники некоторых классов сверток в // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2016. Т.22, №4. С. 284-294.
2. Weyl H. Bemerkungen zum Begriff der differentialquotienten gebrochener Ordnung // Vierteljahresschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zurich. 1917. V.62. P. 296-302.
3. Тухлиев К. Структурные характеристики функций из и точные значения поперечников некоторых классов функций // Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. 2015. 1(158). С. 7-19.