РАЗДЕЛ I. МАТЕМАТИКА

Туйчиев А.М.

Приближение функций частными суммами Фурье-Эрмита

Худжандского государственного университета имени Б.Гафурова

(Таджикистан, Худжанд)

doi:10.18411/spc-12-12-2018-01

idsp: sciencepublic-12-12-2018-01

Пусть $L_2(\mathbb{R})$, где $\mathbb{R} := \{x : -\infty < x < +\infty\}$ – пространство вещественных измеримых функций, суммируемых в квадрате на всей оси $\mathbb{R}$. Под $L_{2,\rho} := L_{2,\rho}(\mathbb{R})$, где $\rho(x) := e^{-x^2}$ будем понимать множество функций f , для которых $\rho^{1/2} f \in L_2(\mathbb{R})$. Норму в $L_{2,\rho}$

определим равенством $\|f\|_{2,\rho} := \|f\|_{L_{2,\rho}} = \left(\int_{\mathbb{R}} \rho(x) f^2(x) dx \right)^{1/2}$. Обозначим через P_n – подпространство алгебраических полиномов $p_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, $a_k \in \mathbb{R}$ степени $\leq n$ и равенством $\varepsilon_n(f)_{2,\rho} := \inf \{ \|f - p_n\|_{2,\rho} : p_n \in P_n \}$ определим величину наилучшего приближения функции $f \in L_{2,\rho}$ элементами p_n из подпространства P_n . Пусть

$H_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!2^n\sqrt{\pi}}} \cdot e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$, $n \in \mathbb{Z}_+$ – ортонормированная система многочленов

Эрмита [1, с.114] в пространстве L_2 и частичную сумму ряда Фурье-Эрмита обозначим через

$$S_n(f, x) = \sum_{k=0}^n c_k(f) H_k(x), \quad (1)$$

где $c_k(f) := \int_{\mathbb{R}} \rho(x) f(x) H_k(x) dx$ – коэффициенты Фурье-Эрмита функции $f \in L_{2,\rho}$.

Хорошо известно свойство минимальности частичных сумм ряда Фурье-Эрмита, выражающееся в том, что

$$\varepsilon_n(f)_{2,\rho} = \|f - S_n(f)\|_{2,\rho} := \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2(f) \right\}^{1/2}. \quad (2)$$

Используя оператор обобщённого сдвига

$$F_h(f) := F_h f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \rho(t) f(x\sqrt{1-h^2} + ht) dt \quad (0 < h < 1),$$

определим величину [2] $\Omega_m(f; t)_{2,\rho} := \sup \{ \|\Delta_h^m(f; x)\|_{2,\rho} : 0 < h \leq t \}$ – и назовём специальным модулем непрерывности порядка m функции $f \in L_{2,\rho}$. Легко можно вычислить [2], что

$$\Omega_m^2(f; t)_{2,\rho} := \sum_{k=1}^{\infty} (1 - (1 - t^2)^{k/2})^{2m} c_k^2(f). \text{ Пусть } D_\rho := \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} \text{ – дифференциальный}$$

оператор второго порядка Чебышёва-Эрмита с соответствующим весом $\rho(x) = e^{-x^2}$.

Полагаем $D_\rho^0 f := f$, $D_\rho^1 f := D_\rho f$ и $D_\rho^1(D_\rho^{r-1} f)$, $r \in \mathbb{N}$. Символом

$L_{2,\rho}^{(r)} := L_2(D_\rho^r)$, ($r \geq 2$, $r \in \mathbb{N}$) обозначим множество функций $f \in L_{2,\rho}$, которые имеют локально абсолютно непрерывные производные $(2r-1)$ -порядка и для которых $D_\rho^r f \in L_{2,\rho}$. В [2] доказано, что если $f \in L_{2,\rho}^{(r)}$, то для коэффициентов Фурье-Эрмита имеет место формула

$$c_n(f) = (-1)^r (2n)^{-r} c_n(D_\rho^r f), \quad r, n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Из равенства (1), учитывая формулу (3), в силу линейности оператора D^r запишем $D^r f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(D_\rho^r f) H_k(x) = (-1)^r \sum_{k=1}^{\infty} (2k)^r c_k(f) H_k(x)$, отсюда применяя равенство Парсеваля, в силу ортогональности системы $\{H_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ в $L_{2,\rho}$ получаем

$$\|D_\rho^r f\|_{2,\rho}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (2k)^{2r} c_k^2(f). \text{ Заменяя } f \text{ на } D^r f \text{ в равенстве (2) и учитывая (3),}$$

будем иметь $\varepsilon_{n-1}^2(D_\rho^r f)_{2,\rho} = \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(D_\rho^r f) = \sum_{k=n}^{\infty} (2k)^{2r} c_k^2(f)$. Справедлива следующая

Лемма. Для любой $f \in L_{2,\rho}^{(r)}$ имеет место точное неравенство

$$\varepsilon_{n-1}(f)_{2,\rho} \leq (2n)^{-r} \cdot \varepsilon_{n-1}(D^r f)_{2,\rho}.$$

Следствие 1. В условиях леммы имеет место равенство

$$\sup_{f \in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{\varepsilon_{n-1}(f)_{2,\rho}}{\varepsilon_{n-1}(D^r f)_{2,\rho}} = \frac{1}{(2n)^r}.$$

Имеет место следующее утверждение

Теорема. Пусть $k, n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+, 0 < p \leq \infty, 0 < h < 1, q(t)$ – неотрицательная измеримая на интервале $(0, h)$ не эквивалентная нулю функция. Тогда справедливо

$$\text{равенство } \sup_{f \in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{(2n)^r \cdot \varepsilon_{n-1}(f)_{2,\rho}}{\left\{ \int_0^h \Omega_m^p(D_\rho^r f, t)_{2,\rho} \cdot q(t) dt \right\}^{1/p}} = \left\{ \int_0^h (1 - (1 - t^2)^{n/2})^{mp} \cdot q(t) dt \right\}^{-1/p}.$$

Из теоремы вытекает ряд следствий.

Следствие 2. Если положить в условиях теоремы $p = 1/m, m \in \mathbb{N}, q(t) = t$, то

$$\text{получаем } \sup_{f \in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{(2n)^r \cdot \varepsilon_{n-1}(f)_{2,\rho}}{\left(\int_0^h \Omega_m^{1/m}(D_\rho^r f, t)_{2,\rho} \cdot t dt \right)^m} = \left(\frac{h^2}{2} + \frac{1}{n+2} \cdot (1 - h^2)^{(n+2)/2} - \frac{1}{n+2} \right)^{-m}, \quad \text{а при}$$

$h = \sqrt{2/(n+2)}$ вытекает следующее равенство

$$\sup_{f \in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{(2n)^r \cdot \varepsilon_{n-1}(f)_{2,\rho}}{\left((n+2) \int_0^{\sqrt{2/(n+2)}} \Omega_m^{1/m}(D_\rho^r f, t)_{2,\rho} \cdot t dt \right)^m} = \left[\left(1 - \frac{2}{n+2} \right)^{(n+2)/2} \right]^{-m} \rightarrow e^m, \quad n \rightarrow \infty.$$

Следствие 3. Если в утверждении теоремы положить

$$q(t) := nt(1 - t^2)^{\frac{n}{2}-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \text{ то получим}$$

$$\sup_{f \in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{(2n)^r \cdot \varepsilon_{n-1}(f)_{2,\rho}}{\left(n \int_0^h \Omega_m^p(D_\rho^r f, t)_{2,\rho} \cdot t(1 - t^2)^{\frac{n}{2}-1} dt \right)^{1/p}} = \left\{ \frac{mp + 1}{[1 - (1 - h^2)^{n/2}]^{mp+1}} \right\}^{1/p}.$$

Аналогичная задача для рядов Фурье-Бесселя была исследована в [3].

***

1. Сегё Г. Ортогональные многочлены. - М.: Физматгиз, 1962.-500с.
2. Абилов В.А., Абилова Ф.В. Некоторые вопросы приближения функций суммами Фурье-Эрмита в пространствах //Изв.вузов. Математика, 2006,1(504), С.3-12.
3. Тухлиев К. Среднеквадратическое приближение функций рядами Фурье– Бесселя и значения поперечников некоторых функциональных классов // Чебышевский сборник. 2016. Т.17, №4. С. 141-156.