2. R. I. Kadiev and A. V. Ponomarev. Stability of stochastic functional differential equations and the W-transform // Electron. J. Diff. Eqns. 2004. V. 2004, no. 92. P. 1-36.
3. J. A. D. Appleby and D. W. Reynolds. Non-exponential stability of scalar stochastic Volterra equations // Statist. Probab. Lett. 2003. V. 62, no. 4. P. 335-343.
4. L. Arnold. Random Dynamical Systems. Berlin – Heidelberg: Springer, 1998. 588 p.
5. V. B. Kolmanovskii and V. R. Nosov. Stability of Functional Differential Equations. New York: Academic Press. 1986. 217 p.
6. X. Mao. Stochastic Differential Equations and Applications. Chichester: Horwood Publishing Ltd. 1997. 360 p.
7. X. Mao and A. E. Rodkina. Exponential stability of stochastic differential equations driven by discontinuous semimartingales // Stochastics and Stochastics Reports. 1995. V. 55. P. 207-224.
8. V. J. Mizel and V. Trutzer. Stochastic hereditary equations: existence and asymptotic stability // J. Integral Equations. 1984. V. 7. P. 1-72.
9. S.-E. A. Mohammed. Stochastic Functional Differential Equations. Boston - London – Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program. 1984. Research notes in Mathematics no. 99. 245 p.
10. S.-E. A. Mohammed. Stochastic Differential Equations With Memory. Theory, Examples and Applications // Proceedings of The Sixth Workshop on Stochastic Analysis. Geilo, Norway. 1996. P. 1-91.
11. M. K. R. Scheutzow. Stationary and Periodic Stochastic Differential Systems: A study of Qualitative Changes with Respect to the Noise Level and Asymptotics. Habilitationsschrift, Universität Keiserslautern, Germany. 1988. 181 p.
12. Е. Ф. Царьков. Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. Рига: Зинатне 1989. 421 с.
13. Е. А. Барбашин. Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967. 224 с.
14. Х. Л. Массера, Х. Х. Шефер. Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. М.: Мир. 1970. 456 с.
15. Н. В. Азбелев, П. М. Симонов. Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2001. 230 с.
16. Р. И. Кадиев, А. В. Пономарев. Input-to-state stability of linear stochastic functional differential equations // J. of Function Spaces. 2016. Article ID 8901563, 12 p.

Литвиненкова З.Н., Оснюк Е.А.

К вопросу о прочностном ресурсе воздушного судна

*Санкт-Петербургский государственный университет гражданской авиации
(Россия, Санкт-Петербург)*

doi:10.18411/spc-12-10-2018-14

idsp: 000001:spc-12-10-2018-14

Аннотация

В конструкциях большинства летательных аппаратов есть тонкостенные элементы с технологическими и эксплуатационными дефектами типа остроконечных надразов, трещин и иных концентраторов напряжений.

Принцип безопасного повреждения [1], применяемый в наше время наряду с принципом безопасного ресурса, допускает наличие подобных дефектов, но ставит задачу перед конструкторами учитывать их влияние на разрушающую нагрузку при расчете прочностного ресурса воздушного судна.

В работе дается уточненное решение задачи о растянутой нормальными напряжениями пластине с трещиной–разрезом с учетом деформации (выпучивания) в ее зоне. При расчете напряженно–деформированного состояния используются соотношения двумерной теории упругости в комплексной форме. Для оценки влияния выпучивания пластины на ее прочность применяется обобщенный метод Бубнова-Галеркина и энергетический подход Гриффитса.

Установлено, что в момент потери устойчивости предельная нагрузка резко снижается (на 25%), а при дальнейшем росте зоны выпучивания меняется незначительно. Этот эффект существенно сказывается на прочности пластинчатых элементов конструкций летательных аппаратов и должен учитываться на этапе проектирования конструкций.

Ключевые слова: прочность, обшивка самолета, пластина, трещина-разрез, концентрация напряжений, выпучивание (деформация), разрушающая нагрузка, безопасное повреждение.

Abstract

The paper gives a refined solution of the problem concerning extended by the normal strain plate that has a crack – cut with consideration of warping (buckling) in the crack zone. When calculating strain-deformed state the ratio of the two-dimensional theory of elasticity is used. To evaluate the influence of buckling of the plate on its strength the generalized method of Bubnov-Galerkin and Griffith energy approach is applied.

Keywords: strength, aircraft covering, plate, crack - the cut, the concentration of stress, buckling (warping), breaking load, safe damage.

Введение

Современная обшивка самолетов состоит из панелей или отдельных листов из алюминиевых сплавов (или титана и нержавеющей стали), отформованных по поверхности крыльев или фюзеляжа. В наше время в основном применяется жесткая металлическая обшивка, воспринимаемая нагрузки в виде крутящих и изгибающих моментов, внешние аэродинамические нагрузки и нагрузки перерезывающих сил, действующих на каркас самолета.

Опыт эксплуатации и ремонта летательных аппаратов показывает, что задолго до разрушения всей конструкции под воздействием упомянутых нагрузок появляются дефекты ее элементов, такие как трещины обшивки, местная потеря устойчивости обшивки (выпучивание), выпадение заклепок и т.д.

Используемый с недавнего времени принцип «безопасного повреждения» [1] позволяет учесть данные дефекты на этапе проектирования и тем самым минимизировать возможность выхода летательного аппарата из строя. Основное положение, на котором базируется концепция безопасного повреждения, состоит в том, что дефекты всегда существуют, даже в новых конструкциях, и что они могут оставаться необнаруженными. Таким образом, прочностной ресурс воздушного судна следует определять на основе критерия прочности, учитывающего наличие дефектов в материале конструкции и развитие трещин, которые не приводили бы к катастрофическому исходу.

Оценка напряженно-деформированного состояния элементов конструкций, содержащих концентраторы напряжений типа трещин, является наиболее ответственным и сложным этапом расчетов на прочность. Однако в них долгое время не учитывался тот факт, что рост трещины в тонколистовом материале сопровождается локальным выпучиванием в зоне трещины, оказывающим влияние на предельную разрушающую нагрузку [2, 3, 4]. По этой причине актуальным представляется изучение распределения напряжений в окрестности одиночных дефектов в пластинах с использованием разрешающих уравнений уточненных классических теорий и последующее построение критериев предельного равновесия с позиций теории разрушения.

Постановка и решение задачи

В данной работе в качестве базовой рассматривается задача о растяжении нормальными напряжениями $\sigma_y^\infty = P$ плоскости с прямолинейной трещиной-разрезом длины $2a$:

$$\begin{aligned} -a \leq x_1^0 \leq a \\ x_2^0 \geq 0, \end{aligned}$$

с берегами, свободными от напряжений (рис.1). Все величины, относящиеся к докритическому состоянию пластины, т.е. до потери устойчивости, будут помечены верхним индексом (x_1^0 и др.).

Местное выпучивание возникает в растянутой нормальными напряжениями $\sigma_y^\infty = P$ пластине в связи с наличием зоны сжимающих напряжений в области трещины, величина которых устанавливается при исследовании докритического состояния пластины по методу Вестергард.

Уравнения Вестергард имеют вид [5]:

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \operatorname{Re} Z - y \operatorname{Im} Z' \\ \sigma_{22} = \operatorname{Re} Z + y \operatorname{Im} Z' \\ \tau_{12} = -y \operatorname{Re} Z' \end{cases} \quad (1)$$

где

Отметим, что функция Вестергард Z связана с комплексными потенциалами Колосова-Мусхелишвили [6] следующим образом:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2} Z, \quad \Psi(z) = -\frac{1}{2} z Z'$$

При введении локальной полярной системы координат с полюсом в конце разреза (ρ^0, φ^0) получена стандартная асимптотика напряжений и смещений:

$$\begin{cases} \sigma_\zeta^0 = \frac{\rho^0}{\sqrt{r^0}} \cos\left(\varphi^0 - \frac{\psi^0}{2}\right) - \frac{\eta}{\sqrt{(r^0)^3}} \sin \frac{3}{2} \psi^0 - 1 \\ \sigma_\eta^0 = \frac{\rho^0}{\sqrt{r^0}} \cos\left(\varphi^0 - \frac{\psi^0}{2}\right) + \frac{\eta}{\sqrt{(r^0)^3}} \sin \frac{3}{2} \psi^0 \\ \tau_{\zeta\eta}^0 = \frac{\eta}{\sqrt{(r^0)^3}} \cos \frac{3}{2} \psi^0 \end{cases} \quad (2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{x_1^0}{a}; \quad \eta = \frac{x_2^0}{a}; \quad \rho^0 = \sqrt{\zeta^2 + \eta^2}; \\ r^0 &= \sqrt{(\zeta^2 - \eta^2 - 1)^2 + 4\zeta^2\eta^2}; \quad \varphi^0 = \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\zeta} \\ \psi^0 &= \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{2\zeta\eta}{\zeta^2 - \eta^2 - 1} + \pi, & \zeta < 1 \\ \operatorname{arctg} \frac{2\zeta\eta}{\zeta^2 - \eta^2 - 1}, & \zeta \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\sigma_{\zeta}^0 = \frac{\sigma_{11}}{P}; \quad \sigma_{\eta}^0 = \frac{\sigma_{22}}{P}; \quad \tau_{\zeta\eta}^0 = \frac{\tau_{12}}{P}$$

Напряжения σ_{ζ}^0 , σ_{η}^0 , $\tau_{\zeta\eta}^0$ были подсчитаны на ЭВМ на прямых $x = \pm a$ при различных значениях η от 0,01 до 2,5. Анализ полученных результатов позволяет сделать вывод, что сжимающие напряжения на кромках $x = \pm a$ максимальны при $0 \leq \eta < 0,5$ и близки к 0 при $\eta \geq 1,1$.

Эти сжимающие напряжения вызывают выпучивание пластины в зоне трещины. Для оценки влияния потери устойчивости на разрушающую нагрузку зона локального выпучивания моделируется полосой L (рис. 1), шириной $2a$, нагруженной по длинным кромкам напряжениями, полученными по формулам (2). Граничные условия задачи формулируются из следующих соображений: на длинных кромках полосы приняты условия упругого защемления с коэффициентом упругой заделки β . Это связано с тем, что при небольшом прогибе пластина (полоса) работает в условиях жесткого защемления длинных сторон ее контура, а при прогибе, соизмеримом с толщиной пластины, ее края можно считать с достаточной степенью точности шарнирно-опертыми.

В дальнейшем проводится численный эксперимент для двух крайних случаев:

а) жесткой заделки (при $\beta = \infty$) и

б) шарнирного опирания (при $\beta = 0$)

краев полосы, то есть при $\zeta = \pm 1$ выполняются граничные условия:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{а) } \omega = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial \zeta} = 0 \quad \text{при } \zeta = \pm 1 \\ \text{б) } \omega = 0, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial \zeta^2} = 0 \quad \text{при } \zeta = \pm 1 \\ \text{При } \eta = 0 \text{ (берег трещины – разреза) граничные условия таковы:} \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial \zeta^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 \omega}{\partial \eta^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 \omega}{\partial \eta \partial \zeta^2} = 0 \\ \text{При } \eta \rightarrow \infty, \quad \omega \rightarrow 0 \end{array} \right. \quad (3)$$

Критические (эйлеровы) напряжения определяются из дифференциального уравнения задачи:

$$DV^4\omega - Pha^2 \left(\sigma_{\zeta}^0 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \zeta^2} + \sigma_{\eta}^0 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + 2\tau_{\zeta\eta}^0 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \zeta \partial \eta} \right) = 0 \quad (4)$$

Здесь

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$$

– цилиндрическая жесткость пластины, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона,

h – толщина пластины, ω – прогиб пластины в поперечном направлении (перпендикулярно плоскости x_1^0, x_2^0).

Краевая задача (3)–(4) решается вариационным методом (обобщенный метод Бубнова-Галеркина) [7].

$$\int_{-1}^1 \int_0^{\infty} \left\{ \nabla^4 \omega - \lambda \left[\sigma_{\zeta}^0 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \zeta^2} + \sigma_{\eta}^0 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + 2\tau_{\zeta\eta}^0 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \zeta \partial \eta} \right] \right\} \delta \omega d\zeta d\eta -$$

$$- \int_{-1}^1 \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial \zeta^2} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \delta \omega d\zeta \Big|_{\eta=0} - \int_{-1}^1 \left[\frac{\partial^3 \omega}{\partial \eta^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 \omega}{\partial \eta \partial \zeta^2} \right] \delta \omega d\zeta \Big|_{\eta=0} = 0 \quad (5)$$

Здесь

$$\lambda = \frac{\rho h a^2}{D} \quad (6)$$

Форма выпученной поверхности задается в виде:

$$\omega(\zeta, \eta) = \sum_{m=2}^p \sum_{n=1}^q A_{mn} \omega_{mn}, \quad (7)$$

где $\omega_{mn} = \cos^m \frac{\pi \zeta}{2} e^{-n\eta}$

Подставляя (7) в (5), получим квадратичную форму с коэффициентами A_{mn} . Минимизируя ее, находим r значений параметра λ , наименьшее из которых позволяет определить из выражения (6) критическое значение растягивающей нагрузки.

$$P_{кр} = \frac{D \lambda_{\min}}{h a^2} = K \frac{\pi^2 D}{a^2 h} = K_1 E \left(\frac{h}{a} \right)^2 \quad (8)$$

Численная реализация указанного метода осуществляется на ЭВМ. Были получены следующие значения коэффициента K_1 в формуле (8):

$$1,08 \leq K_1 \leq 1,2$$

При сравнении полученной в соответствии с формулой (8) зависимости критической нагрузки от толщины для образцов из стали и из алюминиевых сплавов с экспериментальными данными усматривается их хорошее согласование [2,4].

Потеря устойчивости плоской пластины приводит к изменению напряженного состояния у вершины трещины и, следовательно, влияет на процесс разрушения.

Далее в работе оценивается прочность пластины с выпучиванием в зоне трещины с использованием энергетического критерия Гриффитса [8]. При этом предполагается, что линии главных напряжений обтекают выпученную область таким же образом, как если бы на ее месте в пластине имелось сквозное эллиптическое отверстие с полуосями $\max|x_1^0| = a$ и $\max|x_2^0| = b$, $b = 1,1a$.

Основное уравнение теории Гриффитса имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial a} [T(a) - W(a, b, P)] = 0,$$

где $T(a) = 4\gamma_0 a$ – поверхностная энергия трещины,

γ_0 – плотность поверхностной энергии материала,

$W(a, b, P)$ – энергия упругого деформирования, обусловленная раскрытием трещины и увеличением протяженности выпученной зоны при возрастании напряжений P .

Для $W(a, b, P)$ имеем:

$$W(a, b, P) = \frac{\pi P^2}{2E} (2a^2 + ab)$$

Подставляя выражения для T и W в уравнение Гриффитса, находим разрушающую нагрузку P^* (с учетом выпучивания):

$$P^* = \sqrt{\frac{8\gamma E}{\pi(4a + b)}}$$

Обозначим разрушающую нагрузку невыпученной пластины с трещиной через P_0^* . Эта величина может быть получена по формуле для P^* при $b = 0$.

$$P_0^* = \sqrt{\frac{2\gamma E}{a\pi}},$$

которая совпадает с известной формулой Ирвина [9].

Рассмотрим отношение

$$s = \frac{P^*}{P_0^*} = \frac{2}{\sqrt{4 + b/a}}$$

Предположим, что нагрузка, приложенная к бесконечной пластине, превышает критическую:

$$P = KE \left(\frac{h}{a}\right)^2,$$

где $K > 1,08$.

Оценим влияние выпучивания на разрушающую нагрузку, установив зависимость параметра s от коэффициента внешней нагрузки K :

$$s = f(K)$$

Анализ этой зависимости приводит к выводу, что в момент потери устойчивости предельная нагрузка резко падает ($\approx$ на 25%), а при дальнейшем росте зоны выпучивания меняется незначительно. Критическая длина трещины при этом уменьшается.

Литвиненкова З.Н. впервые получила аналитическое решение рассматриваемой задачи в первом приближении с использованием метода Ритца [3,4], до этого имелись лишь экспериментальные исследования. При решении задачи было установлено снижение разрушающей нагрузки на 20%. В данной работе изменен подход к решению задачи, использован более строгий математический аппарат, даны развитие и уточнение полученных ранее результатов (выявлено более существенное падение разрушающей нагрузки, что согласуется с экспериментальными данными [2,4]). Кроме того, установлено, что появление выпучины вызывает уменьшение значения критической длины трещины при неизменной внешней нагрузке

Заключение

Исследование задач деформации и разрушения плоских высоконапряженных элементов обшивки летательных аппаратов является крайне необходимым для того, чтобы корректировать методики расчета их прочности. Выявленный в работе факт существенного снижения предельной разрушающей нагрузки вследствие выпучивания берегов трещины должен приниматься во внимание конструкторами при расчетах на прочность для обеспечения безопасности полетов.

1. Нестеренко Г.И. Требования по усталости и живучести конструкций гражданских самолетов. // Научный вестник МГТУГА № 163, 2011
2. Гольцев В.Ю. и др. Заводская лаборатория № 1, 1961
3. Литвиненкова З.Н. Об устойчивости растянутой пластины с внутренней трещиной. // Известия АН СССР, Механика твердого тела № 5, 1973
4. Литвиненкова З.Н. Разрушающая нагрузка растянутых плоских элементов конструкций самолета (обшивки) у мест выточек. // Вестник СПбГУГА, выпуск 2, 2011
5. Вестергард Г.М. Несущие давления и трещины. // Журнал прикладной механики, том 6, с. А 49-53, 1939
6. Мухелишвили И.Н. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966
7. Галеркин Б.Г. Собрание сочинений. Т. 1.// Изд-во АН СССР, 1952
8. Griffith A.A. The theory of rupture.// Proc. First. Inter. Congress Appl. Mech. Delft., p. 55-63, 1924
9. Irvin G.R. Relation of stresses near a crack to the crack extension force.// Proc.9-th Inter. Congr. Appl. Mech, vol.8, Brussels, 1957