РАЗДЕЛ III. МАТЕМАТИКА

Кадиев Р.И., Поносов А.В.

Стохастическая устойчивость и допустимые пары пространств

ДНЦ РАН

(Россия, Махачкала)

doi:10.18411/spc-12-10-2018-13

idsp: 000001:spc-12-10-2018-13

Введение

Пусть $(\Omega, F, (F_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P})$ - полное вероятностное пространство с фильтрацией, $Z := (z^1, \dots, z^m)^T$ - m -мерный семимартингал на нём (см., например, [1]).

В дальнейшем используются следующие линейные пространства случайных процессов:

- $L^n(Z)$ состоит из $n \times m$ -матричных предсказуемых случайных процессов, заданных на $[0, \infty)$, чьи строки являются локально интегрируемыми по семимартингалу Z : см., например, [1];

- k^n состоит из n -мерных F_0 -измеримых случайных величин (обозначение: $k = k^1$);

- D^n состоит из n -мерных случайных процессов на $[0, \infty)$, которые могут быть представлены в виде: $x(t) = x(0) + \int_0^t H(s) dZ(s)$ ($t \geq 0$), где $x(0) \in k^n$, $H \in L^n(Z)$.

Можно показать, что существует естественный топологический изоморфизм $D^n \cong L^n(Z) \times k^n$, который аналогичен соответствующему детерминированному изоморфизму, связывающему пространства Лебега с пространствами абсолютно непрерывных функций. Этот изоморфизм и его обобщения играют центральную роль в общей теории функционально-дифференциальных уравнений (см., например, [16]). Поэтому, мы можем назвать описанные выше пространства случайных процессов соответственно "пространство решений", "пространство (абстрактных) производных" и "пространство начальных данных".

Здесь и в дальнейшем мы используем обозначение $\mathbf{E}$ для математического ожидания по отношению к заданной вероятностной мере $\mathbf{P}$.

Главным объектом статьи является следующее уравнение:

$$dx(t) = (Vx(t) + f(t))dZ(t), \quad t > 0, \quad (1)$$

где V - k -линейный вольтерров оператор, т. е. оператор, зависящий от "прошлого", который определён на некоторых пространствах случайных процессов.

Напомним, (см., например, [2]), что стохастический оператор V называется:

- k -линейным, если $V(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 Vx_1 + \alpha_2 Vx_2$ для любых ограниченных, F_0 -измеримых, скалярных α_1, α_2 и любых x_1, x_2 из области определения оператора V ;
- вольтерровым, если для любого момента остановки [1] $\tau = \tau(\omega) \in [0, \infty)$ п. н. и любых x_1, x_2 из области определения оператора V , из равенства $x_1(t) = x_2(t)$, $t \in [0, \tau]$ п. н. следует, что $(Vx_1)(t) = (Vx_2)(t)$, $t \in [0, \tau]$ п. н.

Асимптотические свойства уравнения (1) (в основном, его частных случаев) изучались многими авторами: см., например, [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12], а также многочисленные ссылки, приведённые в этих работах.

Изучение связей между устойчивостью и допустимостью пар пространств для обыкновенных дифференциальных уравнений восходит к Е. А. Барбашину [13], Х. Л. Массера и Х. Х. Шеферу [14]. Случай детерминированных функционально-дифференциальных уравнений изучался Н. В. Азбелевым и его учениками (см., например, [15] и приведённые там ссылки).

Стохастические функционально-дифференциальные уравнения.

Рассмотрим линейную задачу

$$\begin{aligned} dx(t) &= (Vx)(t)dZ(t), & t > 0, \\ x(s) &= \varphi(s), & s < 0, & x(0) = x_0. \end{aligned} \quad (2)$$

Для постановки задачи о допустимости пар пространств мы сначала должны переписать (2) в виде

$$\begin{aligned} dx(t) &= ((Vx)(t) + f(t))dZ(t), & t > 0, \\ x(0) &= x_0. \end{aligned} \quad (3)$$

Для получения (3) из (2) мы положим

$$(Vx)(t) := (Vx_+)(t), \quad (V^0x)(t) := (Vx_-)(t), \quad t > 0,$$

где

$$x_+ := xI_{[0, +\infty)}, \quad x_- := xI_{(-\infty, 0)},$$

а I_A - индикатор (характеристическая функция) множества A . Следовательно,

$$Vx = V(x_+ + x_-) = V(x_+) + V(x_-) = Vx + f,$$

где $f := V^0x$. Это даёт (3). Заметим, что f однозначно определяется функцией φ , задающей "предысторию" решения, и не зависит от самого решения $x(t)$, $t > 0$. Отметим также, что задача (3) эквивалентна задаче (2) только для тех f , которые представимы в виде $f = V^0\varphi_I$, где φ_I является каким-либо продолжением функции φ на всё $\mathbf{R}$. При изучении вопросов допустимости пар пространств для уравнения (1) мы фактически будем рассматривать более общие f , чем те, которые задаются формулой $f = V^0\varphi_I$ (см. теорему 1 ниже). Но этого вполне достаточно, если использовать свойство допустимости как достаточное условие для стохастической устойчивости.

Пример.

$$\begin{aligned} dx(t) &= \left(\int_{-\infty}^t x(s) d_s R(t, s) \right) dZ(t), & t > 0, \\ x(s) &= \varphi(s), & s < 0, & x(0) = x_0. \end{aligned} \quad (4)$$

Обозначив $(Vx)(t) = \left(\int_0^t x(s) d_s R(t, s) \right)$, $f(t) = \left(\int_{-\infty}^0 \varphi(s) d_s R(t, s) \right)$, мы получим форму (3).

Основной результат.

Начнём с обзора наиболее важных видов стохастической устойчивости в её классической форме. Ниже $x(t, x_0, \varphi)$ обозначает решение задачи (2), где $x_0 \in k^n$, а $\varphi(s)$, $s < 0$ - F_0 -измеримый случайный процесс с п. н. ограниченными траекториями.

Для данного вещественного числа p ($0 < p < \infty$) нулевое решение однородной задачи, соответствующей задаче

$$\begin{aligned} dx(t) &= (Vx)(t)dZ(t), & t > 0, \\ x(s) &= \varphi(s), & s < 0, & x(0) = x_0, \end{aligned} \quad (4)$$

называется:

- *p-устойчивым* по отношению к начальному значению x_0 и функции "предыстории" φ (или короче: по x_0 и φ), если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что из неравенства $\mathbf{E}|x_0|^p + \text{vraisup}_s < 0 \mathbf{E}|\varphi(s)|^p < \delta$ следует оценка $\mathbf{E}|x(t, x_0, \varphi)|^p \leq \varepsilon, t \geq 0$ для всех φ и x_0 ;
- *асимптотически p-устойчивым* по x_0 и φ , если оно p -устойчиво по x_0 и φ и, кроме того, для всех φ и x_0 , таких что $\mathbf{E}|x_0|^p + \text{vraisup}_s < 0 \mathbf{E}|\varphi(s)|^p < \delta$, выполняется соотношение $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{E}|x(t, x_0, \varphi)|^p = 0$;
- *экспоненциально p-устойчивым* по x_0 и φ , если существуют положительные константы $\bar{c}, \beta$, такие что $\mathbf{E}|x(t, x_0, \varphi)|^p \leq \bar{c} (\mathbf{E}|x_0|^p + \text{vraisup}_s < 0 \mathbf{E}|\varphi(s)|^p) \exp\{-\beta t\}$ ($t \geq 0$) для всех φ и x_0 .

Приводимые здесь определения охватывают большинство известных видов стохастической устойчивости по x_0 и φ . Заметим, что другое название устойчивости по x_0 и φ – это устойчивость по Ляпунову.

Введём теперь понятие допустимости пар пространств для уравнения (1).

Пусть B – линейное подпространство пространства $L^n(Z)$. Предполагается, что пространство B наделено нормой $\|\cdot\|_B$. Для заданной положительной измеримой функции $\gamma(t)$ ($t \in [0, \infty)$) мы положим $B^\gamma = \{f: f \in B, \gamma f \in B\}$, что является линейным пространством с нормой $\|f\|_{B^\gamma} := \|\gamma f\|_B$.

Нам также понадобятся некоторые подпространства "пространства начальных данных" k^n и "пространства решений" D^n :

$$k_p^n = \{ \alpha: \alpha \in k^n, \|\alpha\|_{k_p^n} := (\mathbf{E} |\alpha|^p)^{1/p} < \infty \};$$

$$M_p^\gamma = \{x: x \in D^n, \|x\|_{M_p^\gamma} := \sup_{t \geq 0} (\mathbf{E} |\gamma(t)x(t)|^p)^{1/p} < \infty\}, \quad M_p^1 = M_p.$$

Через $x_f(\cdot, x_0)$ обозначим решение уравнения (1), такое что $x_f(0, x_0) = x_0$.

Определение. Говорят, что пара (M_p^γ, B^γ) допустима для уравнения (1), если найдётся $\bar{c} > 0$, для которого из $x_0 \in k_p^n$ и $f \in B^\gamma$ следует $x_f(\cdot, x_0) \in M_p^\gamma$ и выполнение следующей оценки:

$$\|x_f(\cdot, x_0)\|_{M_p^\gamma} \leq \bar{c} (\|x_0\|_{k_p^n} + \|f\|_{B^\gamma}).$$

В определении говорится, что решения принадлежат M_p^γ , как только $f \in B^\gamma$ и $x_0 \in k_p^n$, и они непрерывно зависят от f и x_0 в соответствующих топологиях. Выбор пространств тесно связан с видом интересующей нас устойчивости.

Следующий результат раскрывает связь между устойчивостью нулевого решения однородной задачи, соответствующей задаче (4), и допустимостью пар пространств для уравнения (1) с оператором V , который определяется по (4) способом, описанным в начале второго параграфа.

Теорема. Пусть дана положительная измеримая функция $\gamma(t)$ ($t \geq 0$). Предположим, что для k -линейного вольтеррова оператора V^0 , определённого, как и ранее, формулой $(V^0 x)(t) = (Vx)(t)$, $t > 0$, где $x = x|_{(-\infty, 0)}$, (так что $x(t) = \varphi(t)$ при $t < 0$), случайный процесс $f = V^0 x$ принадлежит B^γ для всех φ , таких что $\text{vraisup}_{s < 0} \mathbf{E} |\varphi(s)|^p < \infty$, а норма f удовлетворяет оценке $\|f\|_{B^\gamma} \leq K \text{vraisup}_{s < 0} (\mathbf{E} |\varphi(s)|^p)^{1/p}$ для некоторой константы $K > 0$.

1) Если $\gamma = 1$ и пара (M_p^γ, B^γ) допустима для уравнения (1), то нулевое решение однородной задачи, соответствующей задаче (4), является p -устойчивым по x_0 и φ .

2) Если $\gamma(t) = \exp\{\beta t\}$, $\beta > 0$ и пара (M_p^γ, B^γ) допустима для уравнения (1), то нулевое решение однородной задачи, соответствующей задаче (4), является экспоненциально p -устойчивым по x_0 и φ .

3) Если $\lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t) = +\infty$ и $\gamma(t) \geq \delta > 0$, $t \in [0, +\infty)$ для некоторого δ и пара (M_p^γ, B^γ) допустима для уравнения (1), то нулевое решение однородной задачи, соответствующей задаче (4), является асимптотически p -устойчивым по x_0 и φ .

Этот результат даёт возможность произвести эффективную переформулировку задачи: вместо стохастической устойчивости мы можем изучать допустимость соответствующих пар пространств случайных процессов. Некоторые конкретные результаты можно найти в работах [2], [16].

2. R. I. Kadiev and A. V. Ponomarev. Stability of stochastic functional differential equations and the W-transform // Electron. J. Diff. Eqns. 2004. V. 2004, no. 92. P. 1-36.
3. J. A. D. Appleby and D. W. Reynolds. Non-exponential stability of scalar stochastic Volterra equations // Statist. Probab. Lett. 2003. V. 62, no. 4. P. 335-343.
4. L. Arnold. Random Dynamical Systems. Berlin – Heidelberg: Springer, 1998. 588 p.
5. V. B. Kolmanovskii and V. R. Nosov. Stability of Functional Differential Equations. New York: Academic Press. 1986. 217 p.
6. X. Mao. Stochastic Differential Equations and Applications. Chichester: Horwood Publishing Ltd. 1997. 360 p.
7. X. Mao and A. E. Rodkina. Exponential stability of stochastic differential equations driven by discontinuous semimartingales // Stochastics and Stochastics Reports. 1995. V. 55. P. 207-224.
8. V. J. Mizel and V. Trutzer. Stochastic hereditary equations: existence and asymptotic stability // J. Integral Equations. 1984. V. 7. P. 1-72.
9. S.-E. A. Mohammed. Stochastic Functional Differential Equations. Boston - London – Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program. 1984. Research notes in Mathematics no. 99. 245 p.
10. S.-E. A. Mohammed. Stochastic Differential Equations With Memory. Theory, Examples and Applications // Proceedings of The Sixth Workshop on Stochastic Analysis. Geilo, Norway. 1996. P. 1-91.
11. M. K. R. Scheutzw. Stationary and Periodic Stochastic Differential Systems: A study of Qualitative Changes with Respect to the Noise Level and Asymptotics. Habilitationsschrift, Universität Keiserslautern, Germany. 1988. 181 p.
12. Е. Ф. Царьков. Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. Рига: Зинатне 1989. 421 с.
13. Е. А. Барбашин. Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967. 224 с.
14. Х. Л. Массера, Х. Х. Шефер. Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. М.: Мир. 1970. 456 с.
15. Н. В. Азбелев, П. М. Симонов. Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2001. 230 с.
16. Р. И. Кадиев, А. В. Пономарев. Input-to-state stability of linear stochastic functional differential equations // J. of Function Spaces. 2016. Article ID 8901563, 12 p.

Литвиненкова З.Н., Оснюк Е.А.

К вопросу о прочностном ресурсе воздушного судна

*Санкт-Петербургский государственный университет гражданской авиации
(Россия, Санкт-Петербург)*

doi:10.18411/spc-12-10-2018-14

idsp: 000001:spc-12-10-2018-14

Аннотация

В конструкциях большинства летательных аппаратов есть тонкостенные элементы с технологическими и эксплуатационными дефектами типа остроконечных надразов, трещин и иных концентраторов напряжений.

Принцип безопасного повреждения [1], применяемый в наше время наряду с принципом безопасного ресурса, допускает наличие подобных дефектов, но ставит задачу перед конструкторами учитывать их влияние на разрушающую нагрузку при расчете прочностного ресурса воздушного судна.

В работе дается уточненное решение задачи о растянутой нормальными напряжениями пластине с трещиной–разрезом с учетом деформации (выпучивания) в ее зоне. При расчете напряженно–деформированного состояния используются соотношения двумерной теории упругости в комплексной форме. Для оценки влияния выпучивания пластины на ее прочность применяется обобщенный метод Бубнова-Галеркина и энергетический подход Гриффитса.

Установлено, что в момент потери устойчивости предельная нагрузка резко снижается (на 25%), а при дальнейшем росте зоны выпучивания меняется незначительно. Этот эффект существенно сказывается на прочности пластинчатых элементов конструкций летательных аппаратов и должен учитываться на этапе проектирования конструкций.

Ключевые слова: прочность, обшивка самолета, пластина, трещина-разрез, концентрация напряжений, выпучивание (деформация), разрушающая нагрузка, безопасное повреждение.