РАЗДЕЛ II. ФИЗИКА

Шляхтенко П.Г.

Ошибки, допускаемые при расчетах электромагнитных полей в ос-новных учебниках курса общей физики

*Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна профессор
(Россия, Санкт-Петербург)*

doi:10.18411/spc-12-10-2018-12

idsp: 000001:spc-12-10-2018-12

Аннотация

На примере решения двух задач с помощью интегральных уравнений Максвелла рассмотрены методические ошибки, присутствующие при решении этих и подобных задач в основных университетских учебниках в курсе общей физики. Показано, что в случае решения задачи на нахождение магнитного поля бесконечного соленоида вне соленоида эти ошибки приводят к неправильному результату, который вот уже более 40 лет переписывается из учебника в учебник.

Ключевые слова: соображения симметрии, магнитное поле соленоида, интегральные уравнения Максвелла.

Abstract

Using the example of solving two problems with the help of the Mac-Swell integral equations, methodological errors that are present when solving these and similar problems in the main university textbooks on general physics are considered. It is shown that in the case of solving the problem of finding the magnetic field of an infinite solenoid outside the solenoid, these errors lead to an incorrect result, which has been rewritten from a textbook to a textbook for more than 40 years.

Keywords: symmetry considerations, magnetic field, solenoid, Maxwell integral equations.

Введение

Многие серьезные математики не любят читать научные трактаты, если там мало формул из-за "неоднозначности слов".

Гениальный экспериментатор Майкл Фарадей получил в детстве только начальное образование. Поэтому свои многочисленные эксперименты по электричеству и магнетизму он описал в двух очень толстых томах "Трактата об электричестве" на прекрасном английском языке, стараясь писать так, чтобы написанное им было правильно и одинаково понято любым заинтересованным читателем. Для этого ему потребовалось очень много слов.

Молодой математик Джеймс Кларк Максвелл внимательно прочел труд Фарадея и поставил перед собой задачу "перевести все основные закономерности, установленные и описанные Фарадеем, с английского языка на язык математики". В результате он получил четыре коротких уравнения в интегральной форме, а позднее и в дифференциальной форме, обессмертившие его имя, которые вместе с "силой Лоренца" решают в принципе любую задачу классической электродинамики и оптики.

Применяя эти уравнения для однородной изотропной среды с постоянными значениями электромагнитных констант, Максвелл показал, что свет это электромагнитная волна, и вывел знаменитую "формулу Максвелла", связывающую эти константы со скоростью света в данной среде.

Уже много позднее, после создания специальной теории относительности А. Пуанкаре и А. Эйнштейном, оказалось, что уравнения Максвелла инвариантны относительно преобразований Лоренца, т.е. имеют одинаковый вид в любой инерциальной системе, движущейся относительно рассматриваемых явлений с любой скоростью, вплоть до скорости света в вакууме. О чем ни Фарадей, ни Максвелл не имели никакого представления.

"Когда решаешь задачи с помощью этих уравнений, то создается ощущение, что они гораздо умнее нас"...

Поэтому хорошему усвоению лекционного материала, связанного с уравнениями Максвелла, в курсе общей физики уделяется повышенное внимание.

Такое усвоение в условиях спорного постсоветского "реформирования" (сокращения учебных часов при сохранении содержания учебных программ курса общей физики) вынужденно достигается (если достигается) путем решения ограниченного круга симметричных задач, в основном с помощью уравнений Максвелла в интегральной форме.

К сожалению, более чем 35- летний опыт преподавания курса общей физики убедил автора в том, что опубликованная в рекомендуемых учебниках методика решения примерных задач на нахождение напряженности электростатического поля из-за существующих методических ошибок в тексте не может быть понята при самостоятельном чтении даже сильными студентами.

Это проявляется в том, что, пытаясь честно усвоить прочитанное по учебнику, сильные студенты, а иногда и преподаватели, не могут даже подступиться к решению других подобных задач без активной помощи квалифицированных профессоров, если они еще рядом сохранились.

Более того, отсутствие общего методически правильного и понятного подхода, приводит к неверному решению задачи нахождения магнитного поля бесконечного соленоида вне соленоида, которое транслируется из учебника в учебник, как у нас в стране, так и за рубежом, вот уже более 40 лет.

Цель исследования

Ниже, на примерах решения двух задач, методически корректного с точки зрения автора, будут показаны ошибки и неточности, связанные с традиционным изложением этих решений в рекомендованных Министерством образования источниках.

Результаты и их обсуждение

1. Вычисление напряженности электрического поля, создаваемого равномерно заряженным шаром радиусом R с объемной плотностью ρ

Для решения этой задачи с помощью интегральных уравнений Максвелла нужно использовать следующее уравнение, которое непосредственно следует из теоремы Гаусса после замены полного заряда внутри замкнутой поверхности s соответствующим интегралом

$$\oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV \quad (1)$$

где: E_n – проекция вектора напряженности электрического поля на направление нормали (единичного вектора $\vec{n}$, направленного всегда наружу замкнутой поверхности S) к бесконечно малому участку dS этой поверхности; V – объем внутри поверхности S ; dV – бесконечно малый объем, выделенный непосредственно вблизи точки, в которой объемная плотность заряда $\rho = dq/dV$; ε_0 – константа, связанная с системой СИ,

Именно в этом уравнении присутствует проекция искомого вектора E_n (слева) и известная величина ρ (справа).

Уравнение (1) справедливо для любой замкнутой поверхности S . Поэтому при решении задачи мы вправе выбирать эту поверхность таким образом, чтобы из левого интеграла можно было вынести E_n . Очевидно это можно делать только тогда, когда $E_n = \text{const}$.

Поэтому, прежде чем выбрать вид замкнутой поверхности интегрирования, необходимо установить картину электростатического поля, создаваемого заданной системой зарядов в решаемой задаче. Точнее, из каких-то дополнительных соображений определить ход силовых линий вектора $\vec{E}$ во всем рассматриваемом пространстве. При этом устанавливать направление силовой линии не нужно.

Для ряда симметричных распределений заряда (сферическое, цилиндрическое, равномерно заряженная плоскость) "это можно легко сделать, используя соображения симметрии", как написано во всех существующих учебниках. Эти же "соображения симметрии" рекомендуется использовать при выборе вида поверхности интегрирования S . К сожалению, что такое "соображения симметрии" в учебниках ничего не написано. Конечно, большой опыт, интуиция и большой объем остаточных знаний могут помочь преподавателю решить эти проблемы с помощью "соображений симметрии" лособенно не задумываясь о том, что это такое.

Но как быть студенту, "грызущему гранит науки молодыми зубами"?

Автор считает, что под "использованием соображений симметрии" в данном контексте следует понимать следующие действия:

1. поиск геометрического места точек в исследуемом пространстве, которые принципиально неразличимы,
2. использование для этих точек "принципа причинности", т.е. утверждения, что одинаковые причины должны приводить к одинаковым следствиям. Последнее неизбежно приводит к заключению, что раз эти точки неразличимы, то все параметры искомого силового поля в этих точках должны быть одинаковы (иначе их можно было бы отличить по этим параметрам).

Проиллюстрируем это на примере решения обсуждаемой задачи.

На рис. 1 сплошной жирной линией изображен однородно заряженный шар радиусом R .

Представляется очевидным, что в отсутствие посторонних силовых полей, кроме электростатического поля равномерно заряженного ($\rho = \text{const}$) шара, все точки, лежащие на поверхности шара, в принципе неразличимы. Следовательно, величина и направление вектора $\vec{E}$ во всех точках его поверхности также должны быть одинаковы, а следовательно и направлены под одним углом α к вектору нормали к поверхности n . При этом нет никаких видимых предпочтений для величины и знака этого угла (α или $-\alpha$).

Рис. 1. Равномерно заряженный шар радиусом R

Принимая во внимание, что силовые линии электростатического поля начинаются и кончаются на разноименных зарядах, и вектор $\mathbf{E}$ в каждой точке этой поверхности может быть направлен единственно возможным образом по отношению к поверхности, следует, что $\alpha = 0$, а следовательно, он направлен в рассматриваемых точках перпендикулярно поверхности шара. То же самое можно сказать о точках любой сферической поверхности, концентрической с поверхностью шара радиусом $r > 0$.

К подобному выводу можно прийти и математическим путем.

Действительно, раз все точки, лежащие на поверхности любой концентрической сфере в нашей задаче неразличимы, то и потенциал электрического поля во всех этих точках должен быть одинаковым ($\varphi = \text{const}$). Используя связь между вектором $\mathbf{E}$ и φ ($\mathbf{E} = - \text{grad } \varphi$), легко получить [1-3], что проекция вектора напряженности электрического поля на любое направление, касательное к этой поверхности, $E_t = 0$. А следовательно, вектор $\mathbf{E}$ всегда перпендикулярен к эквипотенциальной поверхности.

Поэтому, если мы выберем замкнутую поверхность S в формуле (1) в виде такой сферической поверхности, то очевидно, что в любой точке этой поверхности $E_n = \text{const}$ (все точки этой поверхности неразличимы, т.к. находятся на одном расстоянии от центра, а следовательно все характеристики электрического поля в этих точках должны быть одинаковы).

Из рис. 1 видно, что все пространство поверхностью шара естественно разбивается на два подпространства, когда $R \geq r > 0$ и когда $r > R$.

В первом случае мы можем найти E_n внутри шара. Во втором – снаружи.

В первом случае из (1) для поверхности S_1 следует

$$\oint_{S_1} \mathbf{E}_n dS = E_n \oint_{S_1} dS = E_n 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \int_V dV = \frac{\rho}{3} 4\pi r^3. \quad (2)$$

Решая (2) относительно E_n , получим

$$E_n = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \quad (3)$$

Из (3) видно, что при $\rho > 0$, $E_n > 0$. Т.е. вектор $\mathbf{E}$ во всех точках поверхности S_1 направлен туда же, куда и вектор нормали $\mathbf{n}$, т.е. наружу поверхности S_1 . Если $\rho < 0$, то $E_n < 0$, т.е. вектор $\mathbf{E}$ во всех точках поверхности S_1 направлен в сторону, противоположную вектору нормали $\mathbf{n}$. Векторная форма записи формулы (3)

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \vec{\mathbf{n}}. \quad (4)$$

Из (4) следует, что величина E в центре шара ($r = 0$) равна нулю. Это противоречит широко распространенному школьному взгляду - "чем гуще идут силовые линии, тем больше величина напряженности электрического поля". В случае точечного заряда это правильно, но наш пример показывает, что в общем случае распределенного заряда такое утверждение совершенно не соответствует действительности.

Понятие силовых линий ввел Фарадей. Они помогали ему лучше понимать электрическое поле точечных зарядов. На самом деле это всего лишь полезная абстракция, помогающая строить направление силового вектора в каждой точке линии, направленного по касательной к ней. И ничего более.

Во втором случае, в качестве поверхности интегрирования в (1) выбираем поверхность S_2 (рис. 1). Аналогично решая уравнение (1) и принимая во внимание, что заряд расположен только в объеме шара радиусом R , получим:

$$\oint_{S_2} \mathbf{E}_n dS = E_n \oint_{S_2} dS = E_n 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \int_V dV = \frac{\rho}{\varepsilon_0 3} 4\pi R^3. \quad (5)$$

Решая (5) относительно E_n , получим для электрического поля вне шара

$$E_n = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \quad (6)$$

Из (6) видно, что при $\rho > 0$, $E_n > 0$. Т.е. вектор $\mathbf{E}$ во всех точках поверхности S_2 направлен туда же куда и вектор нормали $\mathbf{n}$, т.е. наружу поверхности.

Если $\rho < 0$, то $E_n < 0$, т.е. вектор $\mathbf{E}$ во всех точках поверхности S_2 направлен в сторону, противоположную вектору нормали $\mathbf{n}$, т.е. можно записать для этого случая в векторной форме:

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \vec{\mathbf{n}} \quad (7)$$

Из (7) видно, что поле равномерно заряженного шара вне шара совпадает с полем точечного заряда, равного заряду шара, помещенного в центр шара.

При выводе формул аналогичных (3) и (6) в [1, 2] сделана методическая ошибка. Вместо проекции E_n , которая может быть и положительной и отрицательной, за знак интеграла выносятся величина вектора $\mathbf{E}$. Поэтому, вместо (3) и (6) в [1, 2] записано, соответственно,

$$E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \quad \text{и} \quad E = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \quad , \quad (8)$$

что в общем случае неверно, т.к. при $\rho < 0$ получается, что положительная величина вектора $\mathbf{E}$ меньше нуля.

2. Вычисление магнитного поля бесконечного соленоида с током I

В хорошо известных университетских учебниках курса общей физики, широко используемых при чтении курса физики в разделе "Электричество и магнетизм" для студентов физических специальностей, например [1,2,3], утверждается, что магнитное поле бесконечного соленоида с током I вне соленоида равно нулю.

На рис. 2 показан участок бесконечного соленоида с током в этом случае, использованный для доказательства этого утверждения в [1,2].

Рис. 2 (из [1])

Авторы рассматривают циркуляцию вектора B по контуру $CC'D'D$ и приходят к выводу, что величина $B=0$ вне соленоида. Этот вывод действительно правомочен, если верно предположение авторов о том, что предполагаемое направление этого вектора параллельно и противоположно направлению вектора B внутри соленоида. Однако это предположение нуждается в доказательстве, которое в [1,2] не приводится.

Автор [3] пытается доказать, рассматривая соленоид, в котором направление тока в каждом витке строго перпендикулярно оси соленоид, т.е. не учитывается спиральный характер протекание тока в обмотке реального соленоида.

В этом случае (рис. 3) любой выделенный элемент dl током I даст в рассматриваемой точке результирующий вектор dB , проекция которого dB_l на направление окружности в рассматриваемой точке, проведенной радиусом r_0 , равным расстоянию от точки до оси спирали, уже не равна нулю, и это нужно учитывать при суммировании.

Рис. 3. Вектор dB , создаваемый элементом dl спирали с током I

Ниже автор постарается корректно решить эту задачу с помощью соответствующего интегрального уравнения Максвелла, не делая дополнительных предположений.

Рассматривается бесконечный соленоид с током I , имеющий плотную намотку проводом прямоугольного сечения.

Будем исходить из "соображений симметрии", под которыми автор понимает то, что уже обсуждалось при решении первой задачи. Кроме этого будем учитывать факт отсутствия у магнитного поля источников поля, что отражается в замкнутости силовых линий вектора B .

Применяя эти соображения к нашей задаче, и учитывая тот факт, что ток в соленоиде движется по спирали, можно сделать вывод, о том, что в общем случае, силовая линия вектора B как внутри соленоида, так и вне его может иметь форму цилиндрической спирали, симметричной относительно оси симметрии соленоида (принцип причинности этого не запрещает), причем все точки этой спирали в рамках рассматриваемой задачи неразличимы. В этом случае не возникает вопрос о необходимости замкнуть эту линию, т.к. соленоид бесконечен и "краев", на которых этот вопрос был бы актуален, не имеет. Конечно, возможны, и по тем же

соображениям, частные случаи спирали – окружность, расположенная в плоскости перпендикулярной оси соленоида (шаг винта равен нулю), и прямая, параллельная оси симметрии (шаг винта бесконечно большой).

Необходимое нам для решения задачи уравнение Максвелла, содержащее проекцию вектора индукции магнитного поля на направление dl контура $l(B_l)$, в случае постоянного тока ($\partial \vec{E}/\partial t = 0$) имеет вид:

$$\oint_l B_l dl = \mu_0 \int_S j_n dS = \mu_0 I_{\text{охв}}, \quad (9)$$

где l – контур (любая замкнутая линия); S – любая поверхность, опирающаяся на этот контур (все точки контура принадлежат этой поверхности); $\vec{j}$ – вектор плотности тока ($j_n = dI/ds$); $I_{\text{охв}}$ – суммарный ток, охватываемый контуром l (протекающий через поверхность S); μ_0 – константа, связанная с системой СИ.

Очевидно, что B_l из (9) можно найти, если выбрать контур l таким образом, чтобы $B_l = \text{const}$.

Выберем в качестве контура интегрирования прямоугольный контур l_1 , изображенный на рис. 4-а.

Рис. 4. Корректный расчет поля соленоида
(рис. 4-б – вид слева на рис. 4-а)

В этом случае, при корректном рассмотрении циркуляции вектора $\vec{B}$ по контуру l_1 , сторона которого 3-4 удалена на бесконечность, из уравнения (9) следует, что

$$\oint_{l_1} B_l dl = \int_1^2 B_l dl + \int_2^3 B_l dl + \int_3^4 B_l dl + \int_4^1 B_l dl = \mu_0 I_{\text{охв}} = 0 \quad (I_{\text{охв}} = 0), \quad (10)$$

где B_l – проекция вектора $\vec{B}$ на направление dl ; $I_{\text{охв}}$ – суммарный ток, охватываемый контуром l_1 .

На бесконечности (на участке 3-4) поле соленоида, очевидно, должно совпадать с полем прямого тока, которое, как известно [1-3], обратно пропорционально расстоянию до тока, т.е. $B = 0$ на этом участке, а следовательно, и интеграл на этом участке равен нулю.

На участках 2-3 и 4-1 касательная к спирали в любой точке перпендикулярна к dl . Следовательно, $B_l = 0$, и интегралы на этих участках тоже равны нулю. Из симметрии задачи следует, что на участке 1-2 все точки неразличимы, а следовательно $B_l = \text{const}$, которую можно вынести за знак интеграла.

Следовательно, и $B_l = 0$, т.е. проекция вектора $\mathbf{B}$ на направление $l_{1,2}$ равна нулю, а не величина вектора $\mathbf{B}$, как утверждается в [1-3].

Остается проверить, не является ли силовая линия вектора $\mathbf{B}$ окружностью, проведенной вокруг оси симметрии соленоида, что никак не противоречит "соображениям симметрии", т.к. очевидно, что все точки на этой окружности неразличимы, а следовательно и проекция вектора $\mathbf{B}$ во всех точках контура l_2 на рис. 4-*b*, выбранного в виде такой окружности будет величиной постоянной. Поэтому, применяя уравнение Максвелла для этого контура [4], получим:

$$\oint_{l_2} B_l dl = B_l \oint_{l_1} dl = B_l 2\pi r = \mu_0 I_{\text{охв}} = \mu_0 I. \quad (11)$$

Откуда следует, что

$$B_l = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \quad (12)$$

В соответствии с правилом выбора знака тока I , его величина в (11) берется со знаком «+», если направление протекания тока совпадает с направлением нормали к поверхности, натянутой на контур l_2 . Направление же нормали (орт $\vec{n}$) определяется направлением движения правого винта, который нужно вращать по направлению выбранного направления обхода контура.

В нашем случае (рис. 4-*b*), выбранное направление обхода контура дает указанное на рисунке направление единичного вектора нормали $\vec{n}$, совпадающее, как видно из рисунка с направлением тока I , протекающего через поверхность, натянутую на контур l_2 , т.е.

$$B_l > 0; \Rightarrow B_l = B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad (13)$$

и следовательно, вектор $\mathbf{B}$ направлен вне соленоида так, как указано на рис. 4-*b*.

При корректном рассмотрении поля соленоида внутри соленоида в этой же задаче, необходимо также априори учесть, что возможным видом силовой линии вектора $\mathbf{B}$ внутри соленоида также является аналогичная винтовая линия, проходящая внутри соленоида. Поэтому, применяя уравнение (9) для контура l_3 (Рис. 4-*a*), с учетом вывода (10) получим:

$$\begin{aligned} \oint_{l_3} B_l dl &= \int_{1'}^{2'} B_l dl + \int_{2'}^{3'} B_l dl + \int_{3'}^{4'} B_l dl + \int_{4'}^{1'} B_l dl = \int_{1'}^{2'} B_l dl = \\ &= B_l l_{1'2'} = \mu_0 I_{\text{охв}} = \mu_0 n l_{1'2'} I, \end{aligned} \quad (14)$$

где n – число витков на единицу длины соленоида ($n = N_{1'2'} / l_{1'2'}$)

Решая (13) относительно B_l , получим, что на участке $l_{1'2'}$

$$B_l = \mu_0 n I. \quad (15)$$

Аналогично, применив (9) для контура l_4 (Рис. 4-*b*), получим, что для этого контура $B_l = 0$.

После чего, применяя правило знаков для охватываемых контуром l_3 токов, получим окончательно правильный ответ для величины вектора $\mathbf{B}$ внутри соленоида

$$\mathbf{B} = \mu_0 n I. \quad (16)$$

Основные выводы

1. Используемые при решении симметричных задач для установления картины электрического поля и магнитного поля т.н. "соображения симметрии" являются отражением известного принципа причинности, а именно одинаковые причины должны

приводить к одинаковым следствиям. Этот принцип применяется для нахождения геометрического места неразличимых точек, в которых все параметры искомого поля должны быть тождественны.

2. С использованием уравнений Максвелла в интегральной форме получено корректное решение двух хорошо известных симметричных задач. Показано, что во избежание методических и фактических ошибок нельзя подменять проекцию вектора его значением, т.к. проекция может иметь знак, а значение вектора всегда положительно. Кроме этого, равенство нулю проекции вектора вовсе не означает равенство нулю вектора. Именно такая подмена привела к неверному ответу при нахождении индукции магнитного поля соленоида вне соленоида, которое транслируется вот уже более 40 лет из учебника в учебник.

3. Показано, что магнитное поле прямого бесконечного соленоида вне соленоида в указанных приближениях не равно нулю, но совпадает с полем прямого бесконечного проводника с током.

1. Э. Парселл. Берклеевский курс физики Электричество и магнетизм: М., «Наука» - 1975 - С. 210-211.
2. Савельев И.В. Курс общей физики т.2. Электричество и магнетизм: М., «Наука» - 1982 - С. 149 - 151.
3. Д.В.Сивухин. Общий курс физики. Электричество: М., «Наука» - 1983 - С. 236-237.
4. Шляхтенко П.Г. Методические ошибки, допускаемые при расчете электрического и магнитного полей с помощью интегральных уравнений Максвелла // Альманах современной науки и образования. 2011.- Т. 8, №2(45). - С. 129-135.