следующим образом: функциональные группы молекул ПАА имеют в щелочной среде отрицательный заряд и являются противоионами по отношению к положительно заряженным частицам гидроксида магния. В результате создаются благоприятные условия для сближения и коагуляции взвешенных частиц, о чем свидетельствует повышение скорости осаждения осадка. Повышение концентрации ПАА создаст избыток противоионов, которое в данном случае, но – видимому играют роль стабилизирующего электролита, повышающего – агрегативную устойчивость суспензии, что отражается понижением скорости осаждения.

Анализ усредненных результатов зависимости оптимальной дозы ПАА от концентрации осаждаемого гидроксида магния в области температур 30-50°C показал, что наиболее оптимальной является $CMg=15$ г/л. При этой концентрации прослеживается экстремум зависимости. Расчет оптимальной дозы ПАА может быть выполнен по следующему уравнению:

$$D_{ПАА} = (6,3 \cdot C - 0,22 C^2 - 6,1) \cdot 10^{-3} \text{ мг/мг}, \quad (3)$$

где C – концентрация гидроксида магния в осадке, г/л.

Относительная погрешность уравнения составляет 4,6%.

Таким образом, полученные результаты исследований и зависимость (1) могут быть использованы для расчета отстойников в схемах комплексной переработки минерализованных вод.

1. Влияние добавок полиакриламида на отстойные свойства дистиллерной суспензии и величину ее электрокинетического потенциала. (Живолуп Н.Е. Русина Е.Л. и др. // Химическая промышленность, №9. 1991. С. 550-551)
2. Ранопорт И.А., Заводская Н.В. Об известковании воды в осветлителе ВТИ -1000 и без ввода коагулянта. Энергетик, 1984, № 1, с 27- 29,
3. Кургаев Е.Ф. О механизме образования осадка при известковании воды. 1988.

Чуйкова А.Г.

Выявление устойчивости положения равновесия с использованием адаптивного регулятора с помощью второго (прямого) метода Ляпунова

*Белгородский государственный национальный исследовательский университет
(Россия, Белгород)*

doi:10.18411/spc-12-06-2018-13

ids: 000001:spc-12-06-2018-13

Данная статья посвящена математическому описанию модели квадрокоптера, которая будет использована в дальнейшем для разработки системы управления (СУ), а именно: кинематика и динамика движения; силы, действующие на БПЛА; допущения, упрощающие математические выражения. На основе этих сведений можно будет перейти напрямую к синтезу СУ.

На рисунке 1 представлена роторная модель квадрокоптера, на которой стрелками показано направление движения каждого из роторов. Каждый из моторов создает тягу и момент вращения. Для того чтобы скомпенсировать моменты вращения, пара моторов 1 и 3 вращаются по часовой стрелке, а роторы 2 и 4 – против часовой. Исходя из этого моменты, создаваемые парой двигателей 1 и 3, компенсируются моментами второй пары – 2 и 4. Путем изменения скоростей вращения двигателей достигается вращение квадрокоптера. Для изменения крена (ϕ) необходимо увеличить угловую скорость вращения двигателя 2 и уменьшить скорость вращения 4.

Изменение тангажа (θ) осуществляется аналогичным образом. Немного сложнее производится изменение рысканья: увеличивается скорость вращения двигателей 1-3 и уменьшается скорость вращения 2-4. Для того чтобы сохранять единую тягу,

создаваемую 4-мя винтами постоянной, необходимо изменение угловой скорости двух винтов (пар винтов).

Рисунок 1 – Системы отсчета и направления поворота

Принятые допущения:

- квадрокоптер симметричен относительно осей x и y ;
- рама квадрокоптера и его винты абсолютно жесткие;
- каждый двигатель располагается на конце стержня;
- тяга, создаваемая каждым винтом, перпендикулярна плоскости x - y ;

Для того чтобы описать положение и перемещение квадрокоптера в пространстве будут применяться инерциальная и связанная системы отсчета (СО), в связи с этим необходимо описать преобразование из одной системы координат в другую. Использование нескольких СО необходимо по следующим причинам:

- уравнения движения Ньютона выведены относительно неподвижной инерциальной системы отсчета. Однако движение проще всего описывается в связанной СО;
- аэродинамические силы и моменты таким же образом проще всего описываются в связанной СО;
- бортовые датчики БПЛА получают информацию относительно связанной СО [1].

На рисунке 2 изображена инерциальная система координат с векторами x , y , z , относительно которой будет вращаться связанная система координат квадрокоптера. В связанной СО использованы углы Эйлера:

- угол крена ϕ ,
- угол тангажа θ ,
- и угол рысканья ψ .

Также на рисунке 2 изображены положительные направления вращения квадрокоптера вдоль осей.

Связь между двумя СО осуществляется с помощью матрицы поворота, которая является суперкомпозицией трех матриц поворота вокруг каждой из осей

$$R = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & s\phi s\theta c\psi - c\phi s\theta & c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi \\ c\theta s\psi & s\phi s\theta s\psi + c\phi s\psi & c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi \\ -s\theta & s\phi c\theta & c\phi c\theta \end{bmatrix}$$

Для того чтобы избежать громоздких выражений для функций $\sin$ и $\cos$ были введены сокращения s и c соответственно.

Двигатели 1-4 являются электроприводами постоянного тока, вращение которых передается на винт через редуктор.

На рисунке 2 представлена схема замещения якоря электродвигателя (ЭД) (Armature circuit) и вала.

Рисунок 2 – Схема электропривода

В этой модели входное напряжение U прикладывается к якору ЭД, а выходом является скорость вращения вала $\dot{\theta}$.

Якорь и вал считаются абсолютно жесткими. Так же в этой модели учитывается вязкое трение (b) – момент трения пропорционален скорости вращения вала.

Параметры ЭД:

J_r – момент инерции вала, $\text{кг} \cdot \text{м}^2$;

b – коэффициент вязкого трения, $\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$;

K_e – коэффициент электродвижущей силы (ЭДС), $\text{В} \cdot \text{с} / \text{рад}$;

K_t – момент вращения двигателя, $\text{Н} \cdot \text{м} / \text{А}$;

R – электрическое сопротивление цепи, Ом ;

L – индуктивность, Гн ;

В целом момент вращения, создаваемый двигателем, пропорционален току якоря и силе магнитного поля. Можно предположить, что магнитное поле не изменяется, в таком случае момент вращения пропорционален току в цепи якоря:

$$M = K_t i$$

Возникающая в контуре самоиндукция пропорциональна скорости вращения вала и связана с ней коэффициентом K_e :

$$e = K_e \dot{\theta}$$

Полагаясь на 2-й закон Ньютона и закон напряжений Кирхгофа можно записать следующую систему:

$$\begin{cases} J_r * \ddot{\theta} + b * \dot{\theta} = K_t i \\ L \frac{di}{dt} + Ri = U - K_e \dot{\theta} \end{cases} \quad (1)$$

Зная частоту вращения двигателя, можно найти тягу, которую развивают винты квадрокоптера:

$$F = C_T \rho A (\dot{\theta} R_{rad})^2 \quad (2)$$

где

C_T – коэффициент тяги;

ρ – плотность воздуха;

A – площадь диска, который образует пропеллер;

R_{rad} – радиус ротора.

Уравнение, описывающее движение квадрокоптера в инерциальной системе отсчета имеет вид:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \frac{1}{m} (\sum_{i=1}^4 F_i) R \bar{e}_3 + (g_r(z) - g) \bar{e}_3 \quad (3)$$

где

$\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ – ускорения вдоль соответствующих осей,

m – общая масса квадрокоптера,

F_i – силы, создаваемые i -м двигателем,

$\bar{e}_3 = [0 \ 0 \ 1]^T$ – вектор столбец, с помощью которого описывается только движение вдоль оси z ,

$g_r(z)$ – эффект действия земли, он предполагается неизвестным,

g – ускорение свободного падения.

Система уравнений, описывающее движение БПЛА в связанной системе координат:

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} &= \frac{l(F_2 - F_4)}{J_1} \\ \ddot{\theta} &= \frac{l(F_3 - F_1)}{J_2} \\ \ddot{\psi} &= \rho \frac{l(F_1 - F_2 + F_3 - F_4)}{J_3} \end{aligned} \quad (4)$$

где $\ddot{\phi}, \ddot{\theta}, \ddot{\psi}$ – ускорения поворота вокруг осей x, y, z соответственно,

l – расстояние от центра рамы до двигателя,

J_1, J_2, J_3 – моменты инерции относительно осей x, y, z соответственно,

ρ – коэффициент масштабирования.

С целью упрощения (3) и (4) введем следующие переменные:

u_1 – результирующая нормированная тяга,

u_2, u_3, u_4 – управляющие переменные для крена, тангажа и рысканья соответственно.

Эти переменные и будут использоваться в качестве входных воздействий.

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{(F_1 + F_2 + F_3 + F_4)}{m} \\ u_2 &= \frac{(F_2 - F_4)}{J_1} \\ u_3 &= \frac{(F_3 - F_1)}{J_2} \\ u_4 &= \rho \frac{(F_1 - F_2 + F_3 - F_4)}{J_3} \end{aligned} \quad (5)$$

Тогда (3) и (4) с учетом (5) можно записать как:

$$\ddot{x} = u_1(\cos\phi\sin\theta\cos\psi + \sin\phi\sin\theta), \quad (6)$$

$$\ddot{y} = u_1(\cos\phi\sin\theta\sin\psi - \sin\phi\sin\theta), \quad (7)$$

$$\ddot{z} = u_1\cos\phi\cos\theta - g - g_r(z), \quad (8)$$

$$\ddot{\phi} = u_2l, \quad (9)$$

$$\ddot{\theta} = u_3l \quad (10)$$

$$\ddot{\psi} = u_4l \quad (11)$$

Введем векторы: $x = [x \ y \ z \ \phi \ \theta \ \psi]^T$, $u = [u_1 u_2 u_3 u_4]^T$. Тогда (6) – (11) в матричной форме запишутся как:

$$\ddot{x} = f(x) + g(x)u + f_r(x), \quad (12)$$

где

$$f(x) = [0 \ 0 \ -g \ 0 \ 0 \ 0]^T,$$

$$f_r(x) = [0 \ 0 \ -g_r(z) \ 0 \ 0 \ 0]^T,$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} \cos\phi\sin\theta\cos\psi + \sin\phi\sin\theta & 0 & 0 & 0 \\ \cos\phi\sin\theta\sin\psi + \sin\phi\sin\theta & 0 & 0 & 0 \\ \cos\phi\cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l \end{bmatrix}$$

Заметим, что получившаяся система не является полностью управляемой: мы не можем напрямую повлиять на координаты x и y .

Часто математическая модель объекта управления (ОУ) неточно описывает сам ОУ; часто невозможно учесть возможные возмущения. Задача инженера обеспечить высокий уровень надежности СУ, несмотря на эти отклонения в описании модели и в условиях ограниченной неопределенности. Для этого были разработаны множество робастных методов, одним из которых является метод скользящего управления. СУ, использующие такой метод, называются системами с переменной структурой (СПС).

Главным преимуществом скользящего режима управления является то, что мы можем выбрать, так называемую, плоскость скольжения или переключения, вдоль которой будет происходить движение системы. Она так названа по следующей причине: если траектория движения системы проходит над этой плоскостью, пропорциональный коэффициент имеет один знак, но, как только траектория окажется под выбранной плоскостью, коэффициент сменит знак на противоположный. Важным моментом здесь является выбор этой самой плоскости. В процессе работы СУ ее структура постоянно меняется – переключается с одной на другую – чем и обуславливается название СПС.

Как было сказано выше, квадрокоптер – система не полностью управляема. Для того чтобы приступить к синтезу регулятора, необходимо дополнить исходную систему так, чтобы матрица g стала квадратной и, как следствие, обратимой. Для этого понадобится ввести две вспомогательные переменные: u_5 и u_6 . Таким способом мы обошли проблему неполной управляемости системы. Тогда (12) запишем как:

$$\ddot{x} = f(x) + G(x)U - v + f_r(x) \quad (13)$$

где $G(x) = [g(x), g_s]$, $U = [u^T u_s^T]^T$, $v = g_s u_s$, $g_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ – константы, $v = [u_5 u_6 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ – член, необходимый для компенсации введенных переменных. Теперь, когда матрица $G(x)$ квадратная, мы можем найти обратную:

$$G^{-1} \approx \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

При этом предполагается что углы изменяются незначительно.

Как было сказано выше, траекторию движения системы можно стабилизировать с помощью регулятора, работающего в режиме скольжения. Для этого выберем такую плоскость $s = 0$, которая бы обеспечивала желаемые динамические свойства. Для этого введем вектор ошибки:

$e = x - x_d$, где $x_d = [x_d, y_d, z_d, \phi_d, \theta_d, \psi_d]$ – желаемый вектор состояния системы. Тогда плоскость скольжения определим как:

$$S = [S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6]^T = e + Ke, \quad (14)$$

где $K = \begin{bmatrix} k_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & k_2 \end{bmatrix}$ – диагональная матрица с положительными элементами.

В СУ будет использоваться нелинейный регулятор, ввиду сложности ОУ и поставленной задачи. Для синтеза нелинейных регуляторов часто используется второй (прямой) метод Ляпунова. Он говорит о том, что если существует положительно определенная функция $L(x)$, а ее производная $\dot{L}(x)$ отрицательно определенная, то выбранное положение равновесия устойчиво. Однако нам интереснее одно из следствий этой теоремы. Оно говорит о том, что если условия второго метода Ляпунова выполняются, то существует асимптотически устойчивый скользящий режим. Таким образом, если нам удастся подобрать функцию Ляпунова, то мы докажем устойчивость нашего режима скольжения.

Для того чтобы избавиться от нелинейностей в (13), нам необходимо ввести оценку значений v и $f_r(x)$, которые мы обозначим $\hat{v}$ и $\hat{f}_r(x)$ соответственно. И введем следующие переменные: $\tilde{v} = v - \hat{v}$ и $\tilde{f}_r(x) = f_r(x) - \hat{f}_r(x)$.

Пусть функция Ляпунова имеет вид:

$$L = \frac{1}{2} S^T S + \frac{1}{2} \tilde{v}^T \Gamma \tilde{v} + \frac{1}{2} \tilde{f}_r(x)^T \Omega \tilde{f}_r(x), \quad (15)$$

где Γ и Ω положительные диагональные матрицы.

Умножив вектор-строку на согласованный вектор-столбец, мы получим сумму произведения элементов. Рассмотрим член $\frac{1}{2} S^T S$ из (13):

$$\frac{1}{2} [S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6] \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} (S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2 + S_5^2 + S_6^2)$$

Получившаяся сумма всегда положительна (комплексные числа не рассматриваются). Тогда оставшиеся члены так же всегда положительны, так как $\tilde{v}$ и $\tilde{f}_r(x)$ тоже векторы-столбцы, а элементы диагональных матриц неотрицательны. Таким образом выбранная функция Ляпунова положительно-определенная.

Предположим, что v и $f_r(x)$ изменяются достаточно медленно так, что $\tilde{v} \cong -\tilde{v}$ и $\tilde{f}_r(x) \cong -\tilde{f}_r(x)$.

Далее нам необходимо найти производную по времени функции Ляпунова. В общем виде она запишется как:

$$\dot{L}(S, \tilde{v}, \tilde{f}_r(x)) = \frac{dL(S, \tilde{v}, \tilde{f}_r(x))}{dS} * \frac{dS}{dt} + \frac{dL(S, \tilde{v}, \tilde{f}_r(x))}{d\tilde{v}} * \frac{d\tilde{v}}{dt} + \frac{dL(S, \tilde{v}, \tilde{f}_r(x))}{d\tilde{f}_r(x)} \frac{d\tilde{f}_r(x)}{dt} = S^T \dot{S} + \tilde{v}^T \Gamma \dot{\tilde{v}} + \tilde{f}_r(x)^T \Omega \dot{\tilde{f}_r}(x) \quad (16)$$

Производная S: $\dot{S} = \ddot{e} + K\dot{e} = \ddot{x} - \ddot{x}_d + K\dot{e}$. Зная $\ddot{x}$ мы можем подставить данное выражение в (13), получим:

$$\dot{L} = S^T [f(x) + G(x)U - v + f_r(x) - \ddot{x}_d + K\dot{e}] + \tilde{v}^T \Gamma (-\dot{\tilde{v}}) + \tilde{f}_r(x)^T \Omega (-\dot{\tilde{f}_r}(x)) \quad (17)$$

Для того чтобы сделать производную функции Ляпунова отрицательно определенной выберем управляющее воздействие:

$$U = G^{-1}(x)[f(x) + \hat{v} - \hat{f}_r(x) + \ddot{x}_d - K\dot{e} - \text{diag}[c_1, c_2, \dots, c_6] \text{sign}(S)] \quad (18)$$

Подставив (16) в (15) получим:

$$\dot{L} = \tilde{v}^T [-S - \Gamma \dot{\tilde{v}}] + \tilde{f}_r(x)^T [S - \Omega \dot{\tilde{f}_r}(x)] - C^T |S| \quad (19)$$

где $C = [c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6]^T$ – вектор-столбец входных коэффициентов.

Теперь мы можем определить введенные ранее переменные u_5, u_6 , а так же оценить неизвестное возмущение $g_r(z)$:

$$\dot{\tilde{v}} = [\dot{e}_x + k_1 e_x \dot{e}_y + k_2 \dot{e}_y + k_2 e_y \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (20)$$

$$\dot{\tilde{f}_r}(x) = [0 \ 0 \ \dot{e}_z + k_3 e_z \ 0 \ 0 \ 0] \quad (21)$$

Если вектор $C = [c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6]^T$ положительный и, учитывая (20) и (21), имеем:

$$\dot{L} = -C^T |S| < 0 \quad (22)$$

Уравнение (22) показывает, что имеется асимптотически устойчивый скользящий режим, для выбранного регулятора.

Ввиду того, что нет возможности управлять состояниями x и y напрямую от входов, необходимо ввести такие желаемые координаты, которые позволят изменять эти состояния. Такого рода координатами являются: крен – изменяет положение по оси y и тангаж – изменяет положение по оси x . Математически обозначим их как:

$$\phi_d = \dot{e}_y + k_\phi e_y \quad (23)$$

$$\theta_d = \dot{e}_x + k_\theta e_x \quad (24)$$

Заключение

В данной статье была описана математическая модель квадрокоптера, уравнения движения в инерциальной и связанной СО. На основе этой модели была предложена структура адаптивного регулятора, работающего в скользящем режиме. Устойчивость положения равновесия с использованием данного регулятора была установлена с помощью второго (прямого) метода Ляпунова.

1. Куршев Н.В., Кожевников Ю.В. Оптимальные задачи динамики полета. 2-е изд. доп. и перераб. Казань: Издательство КГТУ им. А.Н. Туполева, 2010. 326 с.
2. Макаров И.М., Лохин В.М., Манько С.В. Интеллектуальные системы управления беспилотными летательными аппаратами на основе комплексного применения технологий нечеткой логики и ассоциативной памяти, 2002. №2 С. 29-36.
3. Иноземцев Д.П. Беспилотные летательные аппараты: Теория и практика // Автоматизированные технологии изысканий и проектирования, 2013. №2. – С. 50-54.
4. Естественнонаучные, инженерные и экономические исследования в технике, промышленности, медицине и сельском хозяйстве: материалы I Молодёжной научно-практической конференции с международным участием; под общ.ред. С.Н. Девицыной. – Белгород: ИД «Белгород» НИУ «БелГУ», 2017. С. 424-426
5. Степанов Д.Н., Тищенко И.П. Задача моделирования полета беспилотного летательного аппарата на основе системы машинного зрения. // Программные системы: теория и приложения. Электронный журнал. 2011, №4(8). С. 33-34. 29.

6. Управление и наведение беспилотных маневренных летательных аппаратов на основе современных информационных технологий. / Под ред. М.Н. Красильникова, Т.Г. Серебрякова. М.: Физматлит, 2005. 280 с. 30
7. Осипов Г.С., Хачумов В.М., Тихомиров И.А., Яковлев К.С. Интеллектуальные системы управления автономными транспортными средствами: стандарты, проекты, реализация, 2009. № 6. С. 34-43.
8. Ульянов С.В. Нечеткие модели интеллектуальных систем управления: теоретические и прикладные аспекты (обзор). Изве. АН СССР. Сер. Техническая кибернетика. – 1991. – № 3. – С. 3–29.
9. Моисеев В.С., Моисеев Г.В. Гущина Д.С., Основы теории создания и применения информационных беспилотных авиационных комплексов (Серия «Современная прикладная математика и информатика»). Казань: Издательство МОиН РТ, 2010. 196 с.
10. Алиев Р.А., Церковный А.З., Мамедова Г.А. Управление производством при нечеткой исходной информации. М.: Энергоатомиздат, 1991. 240 с.