РАЗДЕЛ I. МАТЕМАТИКА

Курбатова Г.И., Никитчук Б.Я.

Моделирование динамики таяния льда на внешней поверхности многослойного морского газопровода

Санкт-Петербургский государственный университет
(Россия, Санкт-Петербург)

doi:10.18411/spc-12-04-2018-01

idsp: 000001:spc-12-04-2018-01

Введение. Для транспортировки газа по протяжённым морским газопроводам необходимы сверхвысокие давления (порядка 25 МПа). В результате протекания по газопроводу, газ остывает и, начиная с некоторого сечения, его температура может опуститься ниже температуры фазового перехода вода-лёд, при этом возможно оледенение внешней поверхности газопровода. В ходе сезонного изменения температуры воды поток тепла от воды в лёд может превысить значение, начиная с которого возможно таяние льда.

Одномерная математическая модель таяния льда на поверхности газопровода.

$$\rho_1 c_1 \frac{\lambda_1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right), \quad r \in (R, R_1), \quad t > t_0; \quad (1)$$

$$T_1(t_0, r) = T_1^0(r); \quad (2)$$

$$T_1(t, R) = T_0(t), \quad t > t_0; \quad (3)$$

$$t > t_0, \quad r = R_1: \quad T_1 = T_2, \quad \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r}; \quad (4)$$

$$\rho_2 c_2 \frac{\lambda_2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_2}{\partial r} \right), \quad r \in (R_1, R_2), \quad t > t_0; \quad (5)$$

$$T_2(t_0, r) = T_2^0(r); \quad (6)$$

$$t > t_0, \quad r = R_2: \quad T_2 = T_4, \quad \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} = \lambda_4 \frac{\partial T_4}{\partial r}; \quad (7)$$

$$\rho_4 c_4 \frac{\lambda_4}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_4}{\partial r} \right), \quad r \in (R_2, R_2 + y(t)), \quad t > t_0; \quad (8)$$

$$T_4(t_0, r) = T_4^0(r), \quad t > t_0; \quad (9)$$

$$t > t_0, \quad r = R_2 + y(t): \quad T_4 = T_*, \quad \lambda_4 \frac{\partial T_4}{\partial r} - q_3 = \gamma \rho_4 \frac{dy}{dt}; \quad (10)$$

$$y(t_0) = y_0. \quad (11)$$

Здесь индексы: 1 – область первого слоя обшивки газопровода (сталь), 2 – область второго слоя (бетон), 4 – область слоя льда; t – время, r – радиальная координата в цилиндрической системе координат (r, φ, z) , координата z направлена вдоль оси газопровода; R – внутренний радиус газопровода, $R_1 = R + \delta_1$, $R_2 = R_1 + \delta_2$, где δ_1 – толщина слоя стали, δ_2 – толщина слоя бетона; ρ_i, c_i, λ_i – плотность, коэффициент удельной теплоёмкости, коэффициент теплопроводности i -й области соответственно; γ – теплота плавления морского льда; t_0 – момент времени, с которого начинается процесс таяния льда; $y(t)$ – толщина слоя льда; y_0 – начальная толщина слоя

льда; T_i^0 – начальное распределение температур в i -й области; $T_0(t)$ – температура газа на внутренней стенке газопровода; T_* – температура фазового перехода вода-лёд; q_3 – значение величины теплового потока от воды к фронту таяния льда при неизменных температуре и солёности морской воды.

Для определения начальных распределений температур T_i^0 и максимальной толщины слоя льда сначала решается задача оледенения (постановка и алгоритм решения задачи приведены в работе [1]). Если температура окружающей воды увеличивается настолько, что для соответствующего ей значения величины теплового потока q_3 выполняется неравенство:

$$\lambda_4 \frac{\partial T_4}{\partial r} < q_3,$$

то начинается процесс таяния льда, моделируемый системой (1) – (11).

Алгоритм численного решения системы (1) – (11).

Трудность решения нелинейных задач с подвижным фронтом хорошо известна. В настоящей работе при решении одномерной задачи (1) – (11) использовался метод явного выделения фронта, восходящий к работе Ф. П. Васильева [2], в которой доказана сходимость метода. Алгоритм численного решения задачи (1) – (11) основан на неявной разностной схеме, для решения нелинейной разностной системы уравнений используется итерационный процесс в сочетании с методом прогонки. Вводится равномерная сетка по радиусу с шагом h :

$r_i[j] = R_{i-1} + jh$, $j = 0, \dots, N_i$ ($i = 1, 2, 4$), $N_i = \left\lceil \frac{\delta_i}{h} \right\rceil$ (полагается, что $R_0 = R$). Шаг по времени τ^{n+1} является переменным, он определяется на каждом временном слое таким образом, чтобы слой льда за время τ^{n+1} уменьшился на величину h . Обозначим τ^s – величину шага на $(n+1)$ -ом временном слое в i -й итерации, $T_i^s[j]$ – температура i -й области на $(n+1)$ -ом временном слое в s -й итерации, $j = 0, \dots, N_i$. По найденным значениям τ^s и $T_i^s[j]$ переход к $(s+1)$ -й итерации осуществляется по следующему алгоритму.

- Вычисляется поток тепла q_I от фронта льда в слой льда в i -й итерации:

$$q_I = \lambda_4 \frac{T_4^s[N_n] - T_4^s[N_n - 1]}{h},$$

где $N_n = N_4 - n$ (n – номер временного слоя).

- Определяется поток тепла q_{II} ото льда в слой бетона в i -й итерации:

$$q_{II} = \lambda_4 \frac{T_4^s[1] - T_4^s[0]}{h},$$

- Находится толщина слоя льда, растаявшего за время τ^s :

$$h^s = - \frac{\tau^s(q_I - q_3)}{\gamma \rho_4},$$

- Вычисляется шаг по времени τ^{s+1} в $(n+1)$ -ом временном слое в $(s+1)$ -й итерации:

$$\tau^{s+1} = \tau^s - \frac{\gamma \rho_4(h - h^s)}{q_{II} - q_3}.$$

Итерационный процесс считается завершённым, если выполняется неравенство

$$|\tau^{s+1} - \tau^s| < \varepsilon,$$

где ε – заданная величина.

Представленный алгоритм был реализован в виде программы на языке C++. В качестве иллюстрации приведено решение задачи о таянии льда на внешней поверхности многослойного газопровода при имеющемся наборе параметров:

$$R = 0.51 \text{ м}, R_1 = 0.55 \text{ м}, R_2 = 0.67 \text{ м},$$

$$T_* = 271.236 \text{ К}, T_0 = 265.236 \text{ К}, \gamma = 303 \text{ кДж/кг},$$

$$\begin{aligned} c_1 &= 450 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}, \lambda_1 = 24 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}, \rho_1 = 10^4 \text{ кг/м}^3, \\ c_2 &= 924 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}, \lambda_2 = 1.7 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}, \rho_2 = 2300 \text{ кг/м}^3, \\ c_4 &= 2100 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}, \lambda_4 = 2.15 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}, \rho_4 = 931 \text{ кг/м}^3. \end{aligned}$$

До начала таяния температура окружающей воды была такой, что поток тепла q_3 равнялся: $q_3 = 31 \text{ Вт/м}^2$. В момент времени $t = t_0$ температура окружающей воды повысилась таким образом, что поток q_3 стал равным $q_3 = 100 \text{ Вт/м}^2$.

Решение задачи расчёта величины потока q_3 по заданной температуре окружающей воды не представляет трудности, оно рассмотрено, например, в работе [3]. В настоящей работе изменение теплового потока q_3 считается известным.

Результаты

В момент начала процесса таяния льда толщина слоя льда принята равной $y_0 = 18 \text{ см}$. Расчёты проводились для трёх различных постоянных значений теплового потока q_3 , равных 75, 100 и 125 Вт/м². Результаты расчётов представлены в Таб. 1. Соответствующие зависимости толщины слоя льда от времени представлены на Рис. 1.

Таблица 1

Динамика таяния льда при разных значениях q_3 .

$q_3 = 125 \text{ Вт/м}^2$									
$y, \text{ см}$	17.7	15.2	12.7	10.7	8.24	6.24	4.74	2.24	0.24
$t, \text{ сут.}$	0.27	1.63	2.77	3.60	4.56	5.29	5.82	6.68	7.39
$q_3 = 100 \text{ Вт/м}^2$									
$y, \text{ см}$	17.7	15.2	12.7	10.7	8.24	6.24	4.74	2.24	0.24
$t, \text{ сут.}$	0.51	2.88	4.68	5.92	7.31	8.35	9.08	10.26	11.16
$q_3 = 85 \text{ Вт/м}^2$									
$y, \text{ см}$	17.7	15.2	12.7	10.7	8.24	6.24	4.74	2.24	0.24
$t, \text{ сут.}$	1.10	5.43	8.20	9.97	11.88	13.25	14.22	15.74	16.90

Рисунок 1. Зависимость толщины слоя льда от времени для различных значений потока тепла.

Выводы.

Представлена одномерная математическая модель таяния слоя льда на внешней поверхности многослойного морского газопровода. Приведены алгоритм численного решения системы уравнений модели и примеры расчёта процесса таяния для различных значений теплового потоков от воды.

1. V. V. Mikova, G. I. Kurbatova, N. N. Ermolaeva: «Analytical and numerical solutions to Stefan problem in model of the glaciation dynamics of the multilayer cylinder in sea water» / J. Phys.: Conf. Ser. 929 012103 — 2017.
2. Васильев, Ф. П.: «О методе конечных разностей для решения однофазной задачи Стефана» / Ф. П. Васильев // Ж.В.М. и М.Ф. — 1963. — Т.3, No5. — С. 861–873.
3. Ермолаева Н. Н.: «Математическое моделирование нестационарных неизотермических процессов в движущихся многофазных средах» / дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, 2017.