РАЗДЕЛ I. МАТЕМАТИКА

Поленов В.С.

Математическое моделирование процесса затухания волн в наследственно-упругих пористых средах

ВУНЦ ВВС «Военно-воздушная академия имени профессора
Н.Е.Жуковского и Ю.А. Гагарина»
(Россия, Воронеж)

doi:10.18411/spc-12-03-2019-01

idsp: sciencepublic-12-03-2019-01

Аннотация

Разработана математическая модель динамического деформирования двухкомпонентной среды, когда одна из компонент представляет наследственно-упругую среду, а другая – сжимаемую жидкость.

Ключевые слова: среда, пористость, компонента, волна, жидкость, напряжение, перемещение.

Исследование динамического деформирования волновых процессов в насыщенной наследственно-упругой пористой среде очень важно для разработки новых методов диагностики и новых технологий по созданию двухкомпонентных сред, которые могли бы быть применены в области машиностроения, приборостроения, металлургии и атомной энергетике.

Пористость наследственно-упругой среды, насыщенной жидкостью, необходимо так же учитывать при решении значительного числа прикладных задач, возникающих в различных областях человеческой деятельности (грунты, пеноматериалы, различные цементные растворы, песок, пористая керамика).

Однако сложность описания эффектов взаимодействия компонент, теплообмена и других сопутствующих процессов привели к тому, что до настоящего времени общепринятые модели (наследственно-упругая среда – жидкость) полностью не изучены.

Распространению упругих волн в двухкомпонентных пористых средах посвящены работы [1-6], в которых изучаются стационарные и нестационарные волны.

В статье рассматривается гармоническое деформирование волновых процессов в насыщенной жидкостью двухкомпонентной упругой среде, наследственные свойства которой описываются ядром последствия Абеля интегро-дифференциальных соотношений Больцмана - Вольтера, а вторая – сжимаемая жидкость.

Систему уравнений движения двухкомпонентной среды в перемещениях для одномерного случая в операторной форме запишем в виде

$$\begin{aligned}\bar{\mu} u_{,xx}^{(1)} + \bar{Q} u_{,xx}^{(2)} &= \rho_{11} \ddot{u}^{(1)} + \rho_{12} \ddot{u}^{(2)} \\ \bar{Q} u_{,xx}^{(1)} + \bar{R} u_{,xx}^{(2)} &= \rho_{12} \dot{u}^{(1)} + \rho_{22} \ddot{u}^{(2)}\end{aligned}\quad (1)$$

где $\bar{\mu}$ – упругий оператор сдвига; операторы $\bar{Q} = (1 - m) R_0$, $\bar{R} = m R_0$, зависящие от пористости среды и модуля сжимаемости жидкости; m – пористость, R_0 – модуль сжимаемости жидкости, ρ_{11} – эффективная плотность наследственно-упругой компоненты, ρ_{22} – эффективная плотность жидкости, ρ_{12} – коэффициент динамической связи наследственно-упругой компоненты и жидкости, запятая означает дифференцирование по координате x , точка означает дифференцирование по времени

t ., индексы в круглых скобках относятся: 1 – к наследственно-упругой компоненте, 2 – к жидкости.

Запишем систему (1) в безразмерной форме

$$\begin{aligned} G^2(\bar{\sigma}_{11} u_{,xx}^{(1)} + \bar{\sigma}_{12} u_{,xx}^{(2)}) &= \gamma_{11} \dot{u}^{(1)} + \gamma_{12} \dot{u}^{(2)} \\ G^2(\bar{\sigma}_{12} u_{,xx}^{(1)} + \bar{\sigma}_{22} u_{,xx}^{(2)}) &= \gamma_{12} \dot{u}^{(1)} + \gamma_{22} \dot{u}^{(2)} \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\bar{\sigma}_{11} = \frac{\bar{\mu}}{H}$ – наследственно-упругий оператор, $\bar{\sigma}_{12} = \frac{\bar{Q}}{H}$, и $\bar{\sigma}_{22} = \frac{\bar{R}}{H}$ – операторы коэффициентов Q и R .

$$\begin{aligned} H &= \mu_1 + 2Q_1 + R_1, \quad \rho = \rho_{11} + 2\rho_{12} + \rho_{22} \\ \gamma_{11} &= \frac{\rho_{11}}{\rho}, \quad \gamma_{12} = \frac{\rho_{12}}{\rho}, \quad \gamma_{22} = \frac{\rho_{22}}{\rho}, \quad G = \sqrt{\frac{H}{\rho}} \end{aligned} \quad (3)$$

При этом должны выполняться условия

$$\mu_1 + 2Q_1 + R_1 = \rho_{11} + 2\rho_{12} + \rho_{22} = 1 \quad (4)$$

Решение системы (2) будем искать в виде затухающих волн

$$u^{(k)} = C_k e^{i\omega t - (\alpha + i\beta)x} \quad (k = 1, 2) \quad (5)$$

где C_k – амплитуда волны; α – коэффициент затухания; ω – круговая частота;

$\beta = \frac{\omega}{c}$ – фазовая постоянная; c – скорость волны; $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Подставим значения $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ в систему (2), получим

$$\begin{aligned} [\gamma_{11} \omega^2 + \bar{\sigma}_{11} G^2 (\alpha + i \frac{\omega}{c})^2] C_1 + [\gamma_{12} \omega^2 + \bar{\sigma}_{12} G^2 (\alpha + i \frac{\omega}{c})^2] C_2 &= 0 \\ [\gamma_{12} \omega^2 + \bar{\sigma}_{12} G^2 (\alpha + i \frac{\omega}{c})^2] C_1 + [\gamma_{22} \omega^2 + \bar{\sigma}_{22} G^2 (\alpha + i \frac{\omega}{c})^2] C_2 &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Однородная система (6) имеет единственное решение в том случае, если ее определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных C_1 и C_2 , равен нулю. Раскроем данный определитель, получим биквадратное уравнение относительно

$$\begin{aligned} \alpha + i \frac{\omega}{c} \\ (\bar{\sigma}_{11} \bar{\sigma}_{22} - \bar{\sigma}_{12}^2) G^4 (\alpha + i \frac{\omega}{c})^4 + (\gamma_{11} \bar{\sigma}_{22} + \gamma_{22} \bar{\sigma}_{11} - 2\gamma_{12} \bar{\sigma}_{12}) G^2 (\alpha + i \frac{\omega}{c})^2 + a \omega^4 &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

$$a = \gamma_{11} \gamma_{22} - \gamma_{12}^2$$

Упругий оператор $\bar{\sigma}_{11}$ выразим через ядро последствия Абея, который в пространстве Фурье выражается формулой [7-9]

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{11}(\omega) &= \{J_\infty [1 + \nu_\mu \frac{1}{(i\omega\tau)^\gamma}]\}^{-1} \\ \nu_\mu &= \frac{J_\infty - J_0}{J_\infty}, \quad 0 < \gamma \leq 1 \end{aligned} \quad (8)$$

где τ – время ретардации, ω – круговая частота, J_∞ – нерелаксированное значение податливости, J_0 – релаксированное значение податливости, γ – параметр дробности $0 \leq \gamma \leq 1$, учитывающий структурные изменения, связанные с эксплуатацией материала. Операторы $\bar{\sigma}_{12}$ и $\bar{\sigma}_{22}$ в данной задаче равны коэффициентам σ_{12} и σ_{22} .

С учетом (8) уравнение (7) запишем в виде

$$(\gamma_1 + i\gamma_2) G^4 (\alpha + i \frac{\omega}{c})^4 + (\Gamma_1 + i\Gamma_2) G^2 \omega^2 (\alpha + i \frac{\omega}{c})^2 + a \omega^4 = 0 \quad (9)$$

$$\gamma_1 = \sigma_{22} d_1 - \sigma_{12}^2, \quad \gamma_2 = \sigma_{22} d_2, \quad d_1 = \frac{1}{k}[(\omega\tau)^\gamma + \nu_\mu \cos \frac{\pi\gamma}{2}], \quad d_2 = \frac{1}{k} \nu_\mu \sin \frac{\pi\gamma}{2}$$

$$\Gamma_1 = \gamma_{11} \sigma_{22} + \gamma_{22} d_1 - 2\gamma_{12} \sigma_{12}, \quad \Gamma_2 = \gamma_{22} d_2, \quad k = J_\infty [(\omega\tau)^\gamma + 2\nu_\mu \cos \frac{\pi\gamma}{2} + \nu_\mu^2 (\omega\tau)^{-\gamma}]$$

Для получения характеристик звуковых волн, разделим (9) на $(\alpha + i\frac{\omega}{c})^4$ и введем замену

$$z^* = \frac{1}{(\alpha + i\frac{\omega}{c})^2} \quad (10)$$

где z^* – комплексное число.

Тогда (9) сводится к квадратному уравнению относительно z^*

$$a\omega^4 z^{*2} + (\Gamma_1 + i\Gamma_2)G^2\omega^2 z^* + (\gamma_1 + i\gamma_2)G^4 = 0 \quad (11)$$

Из (11) находим

$$z^* = -\frac{G^2}{2a\omega^2}(b_1 + ib_2)$$

$$b_1 = \Gamma_1 \pm \sqrt{r_1} \cos \frac{\varphi_1}{2}, \quad b_2 = \Gamma_2 \mp \sqrt{r_1} \sin \frac{\varphi_1}{2} \quad (12)$$

$$r_1 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, \quad a_1 = \Gamma_1^2 - \Gamma_2^2 - 4a\gamma_1, \quad a_2 = 2(\Gamma_1\Gamma_2 - 2a\gamma_2)$$

$$\varphi_1 = \arctg \frac{a_2}{a_1}, \quad 0 \leq \varphi_1 \leq \frac{\pi}{2}$$

Из (12) следует, что в наследственно-упругой пористой среде существует два типа звуковых волн.

С учетом (10) в соотношении (12) разделим мнимую и действительную части, получим

$$\alpha^2 - \beta^2 = -\frac{2a\omega^2 b_1}{G^2(b_1^2 + b_2^2)}, \quad \alpha\beta = \frac{a\omega^2 b_2}{G^2(b_1^2 + b_2^2)}, \quad \beta = \frac{\omega}{c} \quad (13)$$

где β – фазовая постоянная.

Из системы (13) найдем коэффициент затухания α волны и фазовую постоянную β

$$\alpha = \frac{\omega}{G} \frac{b_2 \sqrt{a}}{\sqrt{(b_1^2 + b_2^2)(b_1 + \sqrt{b_1^2 + b_2^2})}}, \quad \beta = \frac{\omega}{G} \sqrt{\frac{a(b_1 + \sqrt{b_1^2 + b_2^2})}{b_1^2 + b_2^2}} \quad (14)$$

Скорость волны определим из формулы

$$c = G \sqrt{\frac{b_1^2 + b_2^2}{a(b_1 + \sqrt{b_1^2 + b_2^2})}} \quad (15)$$

Так как в формуле (12) коэффициенты b_1 и b_2 имеют знаки $(\pm)$, то в наследственно-упругой, насыщенной жидкостью пористой среде существует две звуковые волны c_1 и c_2 .

Тангенс угла механических потерь определим по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\Gamma_2 \mp \sqrt{r_1} \sin \frac{\varphi_1}{2}}{\Gamma_1 \pm \sqrt{r_1} \cos \frac{\varphi_1}{2}} \quad (16)$$

Введем следующее обозначение

$$\eta = \sqrt{1 + \left(\frac{b_2}{b_1} \right)^2} \quad (17)$$

Тогда коэффициент затухания и скорость волны запишем в виде

$$\alpha = \frac{\omega}{G} \sqrt{\frac{a(\eta - 1)}{b_1 \eta^2}} \quad (18)$$

$$c = G \sqrt{\frac{b_1 \eta^2}{a(\eta - 1)}}$$

На рис. 1 и 2 показаны зависимости скорости и коэффициента затухания от логарифма температуры при следующих фиксированных значениях: $J_\infty = 1$, $\nu_\mu = 1$, $\omega = 1$, $\sigma_{12} = 0.05$, $\sigma_{22} = 0.25$, $\gamma_{11} = 0.95$, $\gamma_{12} = -0.001$, $\gamma_{22} = 0.05$. Значения параметра дробности γ указаны на рисунках.

На рис.1 показана зависимость скорости звуковой волны от логарифма температуры, так как $\omega\tau$ зависит не только от частоты ω , но и от температуры T , которая связана с законом Аррениуса [10]. Из рис.1 следует, что графики функции $c/G = \ln \tau$ при $\tau \rightarrow -\infty$ приближаются к нулю, а при $\tau \rightarrow +\infty$ медленно возрастают и достигают максимального значения. Влияние параметра дробности γ проявляется в том, что при уменьшении параметра кривые на графике становятся более пологими.

Рисунок 1. Зависимость скорости распространения волн от логарифма времени ретардации

Рисунок 2. Зависимость коэффициента затухания от логарифма времени ретардации

Из рис. 2. следует, что при $\ln \tau \rightarrow \pm\infty$ кривые приближаются к нулю и при $\ln \tau = 0$ достигает своего максимального значения. Параметр дробности γ существенно влияет на форму кривых. При увеличении параметра кривые становятся пикообразнее и лишь на небольшом участке поднимаются над осью абсцисс. С уменьшением параметра дробности кривые медленно приближаются к оси абсцисс и пики графика исчезают. Коэффициент затухания волн становится более равномерным.

1. Biot M.A. Theory propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid I. Low-Frequency Range // J. Acoust. Soc. America. 1956. v. 28. № 2. P. 168-178
2. Косачевский Л. Я. О распространении упругих волн в двухкомпонентных средах // ПММ. 1959 Т. 23. Вып. 6. С. 1115 - 1123.
3. Масликова Т.И., Поленов В.С. О распространении нестационарных упругих волн в однородных пористых средах // Изв. РАН. МТТ. 2005. № 1. С. 104 - 108.
4. Борисов А.В., Буренин А.А., Поленов В.С., Чигарев А.В. Волновая динамика неоднородных и нелинейных структур с приложением к геомеханике и биомеханике // Смоленск. Универсум. 2015. 443 с.
5. Polenov V.S., Chigarev A.V. Mathematical modeling of shock waves in inhomogeneous viscoelastic two component media // Journal of Applied Mathematics and Physics. 2018. 6. (5). P. 997-1005.
6. Кукарских Л.А., Поленов В.С. Волновая динамика двухкомпонентных сред // Воронеж. ВУНЦ ВВС. «ВВА». 2017. 174 с.
7. Работнов Ю.Н. Равновесие упругой среды с последствием // ПММ. -1948.-Т. 12.-Вып. 1.-С. 53-62.
8. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций // М. Наука.- 1966. 752 с.
9. Мешков С.И., Росихин Ю.А. О распространении звуковых волн в наследственно упругой среде // ПМТФ.-1968.-№ 5. –С. 89-93.
10. Постников В.С. Внутреннее трение в металлах // М. Металлургия, 1974. 351 с.