РАЗДЕЛ I. МАТЕМАТИКА

Морозова Л.Е.

Рассеяние в случае разностного оператора Шрёдингера для квантовой проволоки

*Ижевский государственный технический университет имени М.Т. Калашикова**(Россия, Ижевск)*

doi:10.18411/spc-12-03-2018-01

idsp: 000001:spc-12-03-2018-01

При описании транспорта электронов через наноразмерные электронные устройства, такие как квантовые контакты, квантовые точки, квантовые проволоки (см. [1-4]), часто используется разностной оператор Шрёдингера (то есть гамильтониан электрона, находящегося в данной структуре), область определений которого состоит из функций, заданных на вершинах графа. При этом различные участки графа задают, например, квантовую точку или проволоку. Несмотря на физическую актуальность, математически эти модели исследованы очень мало, имеющиеся работы относятся к решеткам $\square^v$ (см. например [5]).

Рассмотрим оператор $H_V = H + V$ в пространстве $l^2(\Gamma)$, где $\Gamma = \{(n, 0) : n \in \square\} \cup \{(0, 1)\}$ - множество вершин графа. Здесь H действует по формуле

$$(H\psi)(n, 0) = \psi(n+1, 0) + \psi(n-1, 0), \quad n \leq -1, \quad n \geq 2,$$

$$(H\psi)(0, 0) = \psi(-1, 0) + \omega\psi(0, 1),$$

$$(H\psi)(0, 1) = \omega[\psi(0, 0) + \psi(1, 0)],$$

$$(H\psi)(1, 0) = \omega\psi(0, 1) + \psi(2, 0),$$

здесь $\omega \neq 0$ - вещественное число, V - оператор (потенциал) умножения на вещественную функцию $V(n) = V_0 \delta_{n_0}$, δ_{n_0} - символ Кронекера, $n, n_0 \in \square$. Оператор H_V является гамильтонианом квантовой частицы (электрона), находящегося в системе, состоящей из квантовой проволоки и двух квантовых точек, при этом потенциал V описывает влияние примесей.

В работе изучается задача рассеяния в стационарной постановке для двух возможных направлений распространения частицы. Найдены условия полного отражения и полного прохождения.

Для описания картины рассеяния рассматривается уравнение Липпмана-Швингера для оператора H_V с налетающей волной, распространяющейся вдоль $\square$

$$\begin{cases} \psi_1(n) = e^{\pm i\theta n} - [\omega\psi_2(1) - \psi_1(1)](R_0(\theta)\delta_{n_0})(n) - [\omega\psi_2(1) - \psi_1(1)](R_0(\theta)\delta_{n_1})(n) - \\ \quad - V_0\psi_1(n_0)(R_0(\theta)\delta_{n_0 n})(n), \quad n \in \square, \\ \psi_2(n) = \frac{1}{2\cos\theta}(\omega[\psi_1(0) + \psi_1(1)]), \quad n \in \square. \end{cases}$$

где $\theta \in (-\pi, \pi)$, $\theta \neq 0$. Знак «+» в показателе экспоненты первого уравнения системы данной системы соответствует волне, налетающей слева, а знак «-» волне, налетающей справа. Обозначим $A_-(\theta, \omega)$, $A_+(\theta, \omega)$ - коэффициенты отражения и прохождения, соответственно. Тогда $P_{\pm}(\theta, \omega) = |A_{\pm}(\theta, \omega)|^2$ является, соответственно, вероятностью прохождения и отражения в точке $\theta \in (-\pi, \pi)$, $\theta \neq 0$. Для волны, налетающей слева, доказано следующее утверждение.

Лемма 1. Имеют место формулы:

$$A_{-}(\theta, \omega) = \frac{V_0 e^{2i\theta n_0} (\omega^2 - \cos \theta e^{i\theta}) + (2i \sin \theta + V_0) \cos \theta e^{i\theta} (1 - \omega^2)}{V_0 e^{2i\theta n_0} e^{-i\theta} \cos \theta (1 - \omega^2) + (2i \sin \theta + V_0) (\omega^2 - \cos \theta e^{-i\theta})},$$

$$A_{+}(\theta, \omega) = - \frac{2\omega^2 \sin^2 \theta e^{2i\theta n_0}}{V_0 e^{2i\theta n_0} e^{-i\theta} \cos \theta (1 - \omega^2) + (2i \sin \theta + V_0) (\omega^2 - \cos \theta e^{-i\theta})}.$$

В следующей теореме для волны, налетающей слева, найдено условие полного прохождения частицы.

Теорема 1. Пусть $V = \frac{1 - \omega^2}{\omega^2} 2 \cos \frac{\pi \nu}{n_0}$, $\nu \in \square$. Тогда справедливо равенство $P_{+}(\theta, \omega) = 1$.

Для волны, налетающей справа, доказано следующее утверждение.

Лемма 2. Имеют место формулы:

$$A_{-}(\theta, \omega) = \frac{(\cos \theta e^{-i\theta} - \omega^2)(2i \sin \theta + V_0 e^{-2i\theta n_0}) - V_0 e^{-i\theta} \cos \theta (1 - \omega^2)}{V_0 e^{2i\theta n_0} e^{-i\theta} \cos \theta (1 - \omega^2) + (2i \sin \theta + V_0) (\omega^2 - \cos \theta e^{-i\theta})},$$

$$A_{+}(\theta, \omega) = - \frac{2\omega^2 \sin^2 \theta}{V_0 e^{2i\theta n_0} e^{-i\theta} \cos \theta (1 - \omega^2) + (2i \sin \theta + V_0) (\omega^2 - \cos \theta e^{-i\theta})}.$$

Замечание 1. Имеют место соотношения

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} P_{+}(\theta, \omega) = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} P_{+}(\theta, \omega) = 0, \quad \lim_{V_0 \rightarrow \infty} P_{+}(\theta, \omega) = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty, V_0 \rightarrow \infty} P_{+}(\theta, \omega) = 0.$$

В следующей теореме для волны, налетающей справа, найдены условия почти полного отражения частицы.

Теорема 2. Пусть $\theta = \frac{\pi \nu}{n_0}$, $\nu \in \square$. Тогда справедливо равенство $\lim_{\omega \rightarrow \infty} P_{+}(\theta, \omega) = 1$.

Следует заметить, что в отличие от разностного оператора Шредингера с «локальным» потенциалом (оператором умножения на функцию), вероятности прохождения и отражения различны при изменении направления движения налетающей частицы.

1. Shangguan W. Z., Au Yeung T. C., Yu Y. B., Kam C. H. Quantum transport in one-dimensional quantum dot array // Phys. Rev. B. — 2001. — Vol. 63, 235323 (9p).
2. Orellana P.A., Domingulz-Adame F., Gomes I., Ladron de Guevara M.L. Transport through a quantum wire a side quantum-dot array. Phys. Rev. B., 2004, vol. 67, 085321 (5p).
3. Gores J., Goldhaber-Gordon D., Heemeyer S., Kastner M.A. Fano resonances in electronic transport through a single-electron transistor. Phys. Rev. B., 2000, vol. 62, no. 3, pp. 2188--2195.
4. Chakrabarti A. Fano resonance in discrete lattice models: Controlling lineshapes with impurities // Phys. Letters A. — 2007. — Vol. 336, Issues 4–5. — P. 507–512.
5. Абдуллаев Ж. И., Лакаев С. Н. Асимптотика дискретного спектра разностного трехчастичного оператора Шредингера на решетке // Теор. матем. физика. — 2003. — Т. 136, № 2. — С. 321–245.