В результате нашего исследования визуализация геометрических объектов с помощью технологии 3d- моделирования позволила:

1. В учебной работе задействовать все виды органов чувств и памяти: зрительную, моторную, слуховую.

2. Реализовать в полном объеме принцип являются наглядности и обеспечить исполнение максимального количества практических упражнений конструктивного и изобразительного характера.

3. Отказаться от дедуктивно-логического метода доказательства геометрических положений.

4. Создать все условия для организации самостоятельной исследовательской деятельности учащихся по изучению геометрических объектов.

Таким образом, подчеркивая важность не «образования на всю жизнь», а «образования на протяжении всей жизни», образовательный стандарт предполагает повышение значимости внеурочной деятельности, которая ориентирует педагога на ребенка-главную ценность образования.

1. Старшинова Т.А., Иванов В.Г. Интегративный подход как основа формирования компетентности // Высшее образование в России. 2009. № 8. С. 154–156.

Осипов Г.С.

Исследование влияния функций пересечения множеств в задаче нечеткой диагностики

*Сахалинский Государственный Университет
(Россия, Южно-Сахалинск)*

doi:10.18411/spc-12-02-2018-06

idsp: 000001:spc-12-02-2018-06

При синтезе диагностических экспертных систем, основанных на нечетких базах знаний, возникает проблема решения обратной задачи для нечетких соответствий.

Базовые понятия и постановка задачи

Пусть на базовом дискретном множестве $X = \{x_i\}_{i=1,m} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ определено нечеткое множество $\tilde{A}$ с функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{A}}(x): \tilde{A} = \sum_{\forall x \in X} \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{x} \left(\mu_{\tilde{A}}(x) \in [0; 1] \forall x \in X \right),$$

значения которой представляют собой степени истинности предпосылок.

Аналогично определяется множество Y конечной мощности n и соответствующее нечеткое множество

$$\tilde{B} = \sum_{\forall y \in Y} \frac{\mu_{\tilde{B}}(y)}{y},$$

задающее степени истинности заключений.

Введем нечеткое бинарное соответствие $\tilde{R}(X, Y)$ с функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{R}} = \sum_{(x,y) \in X \times Y} \frac{\mu_{\tilde{R}}(x, y)}{(x, y)},$$

которая определяет степени уверенности эксперта в том, что причина $x \in X$ приводит к следствию $y \in Y$.

Составим нечеткое реляционное уравнение (левое):

$$\tilde{A} \circ (\tilde{A} \rightarrow \tilde{B}) = \tilde{A} \circ \tilde{R} = \tilde{B}.$$

Для удобства исследования запишем его в матричном виде:

$$X \circ R = Y. \quad (1)$$

В качестве композиций наиболее часто используются композиции вида $\max$ – T и $\min$ – I , где T и I – расширения стандартных логических операций конъюнкции и импликации на единичном отрезке [1].

Требуется исследовать влияние вида t -норм T на решение обратной задачи для нечетких реляционных уравнений вида (1).

Рассмотрим наиболее часто используемые t -нормы T :

- логическое произведение (пересечение) $T(a, b) = M(a, b) = \min(a, b)$;
- алгебраическое произведение $T(a, b) = P(a, b) = a \cdot b$;
- граничное произведение $T(a, b) = W(a, b) = \max(a + b - 1, 0)$.

Простейшие нечеткие уравнения

При $m = 1, n = 1$ уравнение (1) примет вид:

$$T(x, r) = y. \quad (2)$$

Утверждение 1. Для того, чтобы уравнение (2) имело решение x^0 необходимо и достаточно выполнение условия: $r \geq y \odot$.

Например, уравнение $T(x, 0.2) = 0.7$ не имеет решений.

Утверждение 2. Формулы для нахождения решения:

$$x^0 = \begin{cases} \left[\begin{array}{l|l} [y, 1] & r = y \\ y & r > y \end{array} \right] & T(x, r) = M(x, r) \\ y/r \ (r > 0) & T(x, r) = P(x, r) \odot \\ y - r + 1 & T(x, r) = W(x, r) \end{cases}$$

В таблице 1 представлены варианты решений простейших нечетких уравнений при использовании наиболее распространенных t -норм.

Таблица 1

Примеры решений уравнений с различными нормами

t -норма	Уравнение		
	$T(x, 0.3) = 0.3$	$T(x, 0.8) = 0.7$	$T(x, 0.5) = 0.1$
$M(x, r)$	$0.3 \leq x^0 \leq 1$	$x^0 = 0.7$	$x^0 = 0.1$
$P(x, r)$	$x^0 = 1$	$x^0 = 0.875$	$x^0 = 0.2$
$W(x, r)$	$x^0 = 1$	$x^0 = 0.9$	$x^0 = 0.6$

Полиномиальные уравнения

Пусть $m > 1; n = 1$, тогда $X = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_m), R = (r_1 \ r_2 \ \dots \ r_m)^T$ и уравнение (1) примет вид:

$$\max_i (T(x_i, r_i)) = y \ (i = \overline{1, m}). \quad (3)$$

Термин «полиномиальное уравнение» вводится согласно [1].

Утверждение 3.

Для того, чтобы уравнение (3) имело решение $(x_1^0 \ x_2^0 \ \dots \ x_m^0)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие.

$$\exists k(1 \leq k \leq m): r_k \geq y.$$

Необходимость $\left(\exists (x_1^0 \ x_2^0 \ \dots \ x_m^0) \Rightarrow \exists k(1 \leq k \leq m): r_k \geq y \right):$

Пусть $(x_1^0 \ x_2^0 \ \dots \ x_m^0)$ – решение уравнения (3). Тогда найдется по крайней мере одно число $1 \leq k \leq m$ для которого выполняется равенство $T(x_k^0, r_k) = y$, а это значит, что $r_k \geq y$ ☺

Достаточность $\left(\exists k(1 \leq k \leq m): r_k \geq y \Rightarrow \exists (x_1^0 \ x_2^0 \ \dots \ x_m^0) \right):$

Пусть $\exists k(1 \leq k \leq m): r_k \geq y$. Тогда хотя бы одно из уравнений $T(x_k, r_k) = y$ имеет решение, следовательно для (3):

$$\max_i (T(x_i, r_i)) = \max (T(x_1, r_1) \leq y, T(x_2, r_2) \leq y, \dots, T(x_k, r_k) = y, \dots) = y \text{ ☺}$$

Утверждение 4

Компоненты максимального решения уравнения определяются следующим образом:

$$\bar{x}_i^0 = \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ u \end{array} \middle| \begin{array}{l} r_i \leq y \\ r_i > y \end{array} \right. (i = \overline{1, m}), \text{ где}$$

$$u = \left\{ \begin{array}{l} y \\ y/r_i \\ y - r_i + 1 \end{array} \middle| \begin{array}{l} M(x_i, r_i) \\ P(x_i, r_i) \\ W(x_i, r_i) \end{array} \right. \text{ ☺}.$$

Утверждение 5

Компоненты минимального решения уравнения определяются следующим образом:

$$\underline{x}_i^0(k) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ u \\ 0 \end{array} \middle| \begin{array}{l} r_i < y \\ i = Q_k \\ i \neq Q_k \end{array} \right. ; (i = \overline{1, m}; k = \overline{1, |Q|}),$$

где $Q = \{i: r_i \geq y (i = \overline{1, m})\}$ ☺

Очевидно, если ни одно из простейших уравнений $T(x_i, r_i) = y$ не имеет решений, то и множество решений полиномиального уравнения пусто.

Пример. Рассмотрим нечеткое реляционное уравнение:

$$X \circ R = Y = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4) \circ \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.7 \\ 0.5 \\ 0.8 \end{pmatrix} = (0.7).$$

Используя max-Ткомпозицию получим уравнение:

$$\max_i (T(x_i, r_i)) = y (i = \overline{1, 4}). \quad (4)$$

Очевидно, при различных используемых треугольных нормах M, P и W уравнение (4) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned}\max(\min(x_1, 0.2), \min(x_2, 0.7), \min(x_3, 0.5), \min(x_4, 0.8)) &= 0.7, \\ \max((x_1 \cdot 0.2), (x_2 \cdot 0.7), (x_3 \cdot 0.5), (x_4 \cdot 0.8)) &= 0.7, \\ \max(\max(x_1 + 0.2 - 1, 0), \max(x_2 + 0.7 - 1, 0), \max(x_3 + 0.5 - 1, 0), \max(x_4 + 0.8 - 1, 0)) &= 0.7\end{aligned}$$

Решения уравнения при различных нормах представлены в таблице 2.

Таблица 2

Сравнение решения уравнения

T	x^0	$\bar{x}^0$	$\underline{x}^0$
M	$0 \leq x_1^0 \leq 1 \left[\begin{array}{c c c} 0 \leq x_2^0 < 0.7 & 0 \leq x_3^0 \leq 1 & x_4^0 = 0.7 \\ \hline 0.7 \leq x_2^0 \leq 1 & 0 \leq x_3^0 \leq 1 & 0 \leq x_4^0 \leq 0.7 \end{array} \right.$	$(1 \mid 1 \mid 1 \mid 0.7)$	$\left(\begin{array}{c c c c} 0 & 0 & 0 & 0.7 \\ \hline 0 & 0.7 & 0 & 0 \end{array} \right)$
P	$0 \leq x_1^0 \leq 1 \left[\begin{array}{c c c} 0 \leq x_2^0 < 1 & 0 \leq x_3^0 \leq 1 & x_4^0 = 7/8 \\ \hline x_2^0 = 1 & 0 \leq x_3^0 \leq 1 & 0 \leq x_4^0 \leq 7/8 \end{array} \right.$	$(1 \mid 1 \mid 1 \mid 7/8)$	$\left(\begin{array}{c c c c} 0 & 0 & 0 & 7/8 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$
W	$0 \leq x_1^0 \leq 1 \left[\begin{array}{c c c} 0 \leq x_2^0 < 1 & 0 \leq x_3^0 \leq 1 & x_4^0 = 0.9 \\ \hline x_2^0 = 1 & 0 \leq x_3^0 \leq 1 & 0 \leq x_4^0 \leq 0.9 \end{array} \right.$	$(1 \mid 1 \mid 1 \mid 0.9)$	$\left(\begin{array}{c c c c} 0 & 0 & 0 & 0.9 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$

Системы полиномиальных уравнений

Если $m > 1$; $n > 1$, то

$$X = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_m), R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \dots & r_{mn} \end{pmatrix}, Y = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n)$$

и уравнение (1) представляет собой систему полиномиальных уравнений:

$$\max_i (T(x_i, r_{ij})) = y_j \ (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}).$$

Компоненты максимального решения системы определяются следующим образом:

$$\bar{x}^0 = \left(\min_{j=\overline{1, n}} (\bar{x}_{ij}^0), (i = \overline{1, m}) \right).$$

Практическая реализация.

Исследуем известную нечеткую задачу диагностики [1, 2]:

$$X \circ R = Y = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4) \circ \begin{pmatrix} 1.0 & 0.1 & 0.2 \\ 0.8 & 0.9 & 1.0 \\ 0.7 & 0.8 & 0.5 \\ 1.0 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix} = (0.9 \ 0.1 \ 0.2)$$

В таблице 3 представлены результаты решения трех уравнений и всей системы для t -нормы M .

Таблица 3

Итоговая таблица с решениями задачи

j	x^0	$\bar{x}^0$	$\underline{x}^0$
1	$\left[\begin{array}{c c c c} 0 \leq x_1^0 < 0.9 & 0 \leq x_2^0 \leq 1 & 0 \leq x_3^0 \leq 1 & x_4^0 = 0.9 \\ \hline x_1^0 = 0.9 & 0 \leq x_2^0 \leq 1 & 0 \leq x_3^0 \leq 1 & 0 \leq x_4^0 \leq 0.9 \end{array} \right]$	$(0.9 \mid 1 \mid 1 \mid 0.9)$	$\left(\left[\begin{array}{c c c c} 0 & 0 & 0 & 0.9 \\ \hline 0.9 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \right)$
2	$\left[\begin{array}{c c c c} 0 \leq x_1^0 < 0.1 & \left[\begin{array}{c c} 0 \leq x_2^0 < 0.1 & \left[\begin{array}{c c} 0 \leq x_3^0 < 0.1 & x_4^0 = 0.1 \\ \hline x_3^0 = 0.1 & 0 \leq x_4^0 \leq 0.1 \end{array} \end{array} \right] \\ \hline x_2^0 = 0.1 & 0 \leq x_3^0 \leq 0.1 & 0 \leq x_4^0 \leq 0.1 \end{array} \right]$ $\left[\begin{array}{c c c c} 0.1 \leq x_1^0 \leq 1 & 0 \leq x_2^0 \leq 0.1 & 0 \leq x_3^0 \leq 0.1 & 0 \leq x_4^0 \leq 0.1 \end{array} \right]$	$(1 \mid 0.1 \mid 0.1 \mid 0.1)$	$\left(\left[\begin{array}{c c c c} 0 & 0 & 0 & 0.1 \\ \hline 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ \hline 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ \hline 0.1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \right)$
3	$\left[\begin{array}{c c c c} 0 \leq x_1^0 < 0.2 & \left[\begin{array}{c c} 0 \leq x_2^0 < 0.2 & \left[\begin{array}{c c} 0 \leq x_3^0 < 0.2 & 0.2 \leq x_4^0 \leq 1 \\ \hline x_3^0 = 0.2 & 0 \leq x_4^0 \leq 1 \end{array} \end{array} \right] \\ \hline x_2^0 = 0.2 & 0 \leq x_3^0 \leq 0.2 & 0 \leq x_4^0 \leq 1 \end{array} \right]$ $\left[\begin{array}{c c c c} 0.2 \leq x_1^0 \leq 1 & 0 \leq x_2^0 \leq 0.2 & 0 \leq x_3^0 \leq 0.2 & 0 \leq x_4^0 \leq 1 \end{array} \right]$	$(1 \mid 0.2 \mid 0.2 \mid 1)$	$\left(\left[\begin{array}{c c c c} 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ \hline 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ \hline 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ \hline 0.2 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \right)$
$\vdots$	$x_1^0 = 0.9 \mid 0 \leq x_2^0 \leq 0.1 \mid 0 \leq x_3^0 \leq 0.1 \mid 0 \leq x_4^0 \leq 0.1$	$(0.9 \mid 0.1 \mid 0.1 \mid 0.1)$	$(0.9 \mid 0 \mid 0 \mid 0)$

Таблица 4 содержит решения уравнений, входящих в систему при использовании t-нормыР.

Таблица 4

Решения уравнений при использовании алгебраического произведения

j	x^0	$\bar{x}^0$	$\underline{x}^0$
1	$\left[\begin{array}{c c c c} 0 \leq x_1^0 < 0.9 & 0 \leq x_2^0 \leq 1 & 0 \leq x_3^0 \leq 1 & x_4^0 = 0.9 \\ \hline x_1^0 = 0.9 & 0 \leq x_2^0 \leq 1 & 0 \leq x_3^0 \leq 1 & 0 \leq x_4^0 \leq 0.9 \end{array} \right]$	$(0.9 \mid 1 \mid 1 \mid 0.9)$	$\left(\left[\begin{array}{c c c c} 0 & 0 & 0 & 0.9 \\ \hline 0.9 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \right)$
2	$\left[\begin{array}{c c c c} 0 \leq x_1^0 < 1 & \left[\begin{array}{c c} 0 \leq x_2^0 < 1/9 & \left[\begin{array}{c c} 0 \leq x_3^0 < 1/8 & x_4^0 = 1/5 \\ \hline x_3^0 = 1/8 & 0 \leq x_4^0 \leq 1/5 \end{array} \end{array} \right] \\ \hline x_2^0 = 1/9 & 0 \leq x_3^0 \leq 1/8 & 0 \leq x_4^0 \leq 1/5 \end{array} \right]$ $\left[\begin{array}{c c c c} x_1^0 = 1 & 0 \leq x_2^0 \leq 1/9 & 0 \leq x_3^0 \leq 1/8 & 0 \leq x_4^0 \leq 1/5 \end{array} \right]$	$(1 \mid 1/9 \mid 1/8 \mid 1/5)$	$\left(\left[\begin{array}{c c c c} 0 & 0 & 0 & 1/5 \\ \hline 0 & 0 & 1/8 & 0 \\ \hline 0 & 1/9 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \right)$
3	$\left[\begin{array}{c c c c} 0 \leq x_1^0 < 1 & \left[\begin{array}{c c} 0 \leq x_2^0 < 0.2 & \left[\begin{array}{c c} 0 \leq x_3^0 < 0.4 & x_4^0 = 1 \\ \hline x_3^0 = 0.4 & 0 \leq x_4^0 \leq 1 \end{array} \end{array} \right] \\ \hline x_2^0 = 0.2 & 0 \leq x_3^0 \leq 0.4 & 0 \leq x_4^0 \leq 1 \end{array} \right]$ $\left[\begin{array}{c c c c} x_1^0 = 1 & 0 \leq x_2^0 \leq 0.2 & 0 \leq x_3^0 \leq 0.4 & 0 \leq x_4^0 \leq 1 \end{array} \right]$	$(1 \mid 0.2 \mid 0.4 \mid 1)$	$\left(\left[\begin{array}{c c c c} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0.4 & 0 \\ \hline 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \right)$

Очевидно пересечение максимальных решений отдельных уравнений $(0.9 \mid 1/9 \mid 1/8 \mid 1/5)$ не является (максимальным) решением системы, т.е. система несовместна.

Результаты решения уравнений при использовании t-нормы W приведены в таблице 5.

Таблица. 5

Решения уравнений при использовании граничного произведения

j	x^0	$\bar{x}^0$	$\underline{x}^0$
1	$\left[\begin{array}{cc cc} 0 \leq x_1^0 < 0.9 & 0 \leq x_2^0 \leq 1 & 0 \leq x_3^0 \leq 1 & x_4^0 = 0.9 \\ \hline x_1^0 = 0.9 & 0 \leq x_2^0 \leq 1 & 0 \leq x_3^0 \leq 1 & 0 \leq x_4^0 \leq 0.9 \end{array} \right]$	$(0.9 \mid 1 \mid 1 \mid 0.9)$	$\left(\left[\begin{array}{cc cc} 0 & 0 & 0 & 0.9 \\ \hline 0.9 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \right)$
2	$\left[\begin{array}{cc cc} 0 \leq x_1^0 < 1 & \left[\begin{array}{cc cc} 0 \leq x_2^0 < 0.2 & \left[\begin{array}{cc cc} 0 \leq x_3^0 < 0.3 & x_4^0 = 0.6 \\ \hline x_3^0 = 0.3 & 0 \leq x_4^0 \leq 0.6 \end{array} \end{array} \right] & \left[\begin{array}{cc cc} 0 \leq x_3^0 < 0.3 & x_4^0 = 0.6 \\ \hline x_3^0 = 0.3 & 0 \leq x_4^0 \leq 0.6 \end{array} \right] \\ \hline x_1^0 = 1 & 0 \leq x_2^0 \leq 0.2 & 0 \leq x_3^0 \leq 0.3 & 0 \leq x_4^0 \leq 0.6 \end{array} \right]$	$(1 \mid 0.2 \mid 0.3 \mid 0.6)$	$\left(\left[\begin{array}{cc cc} 0 & 0 & 0 & 0.6 \\ \hline 0 & 0 & 0.3 & 0 \\ \hline 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \right)$
3	$\left[\begin{array}{cc cc} 0 \leq x_1^0 < 1 & \left[\begin{array}{cc cc} 0 \leq x_2^0 < 0.2 & \left[\begin{array}{cc cc} 0 \leq x_3^0 < 0.7 & x_4^0 = 1 \\ \hline x_3^0 = 0.7 & 0 \leq x_4^0 \leq 1 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{cc cc} 0 \leq x_3^0 < 0.7 & x_4^0 = 1 \\ \hline x_3^0 = 0.7 & 0 \leq x_4^0 \leq 1 \end{array} \right] \\ \hline x_1^0 = 1 & 0 \leq x_2^0 \leq 0.2 & 0 \leq x_3^0 \leq 0.7 & 0 \leq x_4^0 \leq 1 \end{array} \right]$	$(1 \mid 0.2 \mid 0.7 \mid 1)$	$\left(\left[\begin{array}{cc cc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0.7 & 0 \\ \hline 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \right)$

В данном случае пересечение максимальных решений отдельных уравнений $(0.9 \mid 0.2 \mid 0.3 \mid 0.6)$ является (максимальным) решением системы, т.е. система совместна.

Таким образом, можно сделать вывод о том, выбор функции пересечения нечетких множеств приводит к различным решениям обратной задачи (задачи диагностики) для нечетких соответствий. Содержательная интерпретация получаемых решений определяется спецификой исследуемой предметной области

1. Блюмин С. Л., Шуйкова И. А., Сараев П. В., Черпаков И. В. Нечеткая логика: алгебраические основы и приложения. Липецк: ЛЭГИ. 2002. 111с.
2. Леоненков А. В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. СПб.: БХВ-Петербург. 2005. 736 с.