Секция: Информационные технологии

УДК 004.891.3

ББК 22.186

Осипов Геннадий Сергеевич, д-р. тех. наук

Сахалинский государственный университет, г. Южно-Сахалинск

E-mail: Osipov_GS@SakhGU.ru

ОПТИМИЗАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ОБРАТНОЙ МНОГОЭТАПНОЙ ЗАДАЧИ С НЕЧЕТКИМИ СООТВЕТСТВИЯМИ

Аннотация: Целью настоящего исследования является отработка методологии сведения обратной задачи для систем нечетких реляционных уравнений к оптимизационной (экстремальной) задаче.

Ключевые слова: нечеткое соответствие, нечеткое реляционное уравнение, оптимизационная задача

Введение

При комплексном исследовании сложных систем возникает необходимость решения трудно формализуемой и трудоемкой задачи определения исходных предпосылок, которые привели систему в текущее состояние, характеризующееся наблюдаемыми параметрами. Проблемы такого уровня сложности характерны, например, для предметных областей, связанных с исследованием и диагностикой сложных социально-экономических, эколого-биологических, медико-диагностических, технических и техногенных систем.

Существенное усложнение задач диагностики вызывает неопределенность, обусловленная тем, что исходная информация по исследуемым системам, как правило, неполна и неточна и может быть представлена только экспертными степенями истинности в виде нечетких соответствий.

В настоящее время не существует универсального метода решения задач такого класса. Более того, все разработанные методы обладают принципиально высокой трудоемкостью, множество решений обратной задачи для нечетких соответствий может быть пусто или, наоборот, неоднозначным. Поэтому в настоящем исследовании предлагается методология решения систем нечетких реляционных уравнений с помощью экстремальной задачи, которая позволяет всегда получить оптимальное по некоторому критерию качества решение проблемы.

1 Основные понятия и определения

Пусть A , B и C – непустые конечные четкие множества. Введем базовые определения [1, 2].

Нечетким соответствием $\tilde{R}$ называется нечеткое подмножество декартова произведения $A \times B$.

Пусть на $A \times B$ и $B \times C$ заданы нечеткие соответствия $\tilde{R}(A, B)$ и $\tilde{Q}(B, C)$:

$$\tilde{R} = \int_A \frac{\int_B \mu_{\tilde{R}}(a, b)}{a} = \iint_{A \times B} \frac{\mu_{\tilde{R}}(a, b)}{(a, b)}, \quad \tilde{Q} = \int_B \frac{\int_C \mu_{\tilde{Q}}(b, c)}{b} = \iint_{B \times C} \frac{\mu_{\tilde{Q}}(b, c)}{(b, c)}.$$

Композицией соответствий называется нечеткое соответствие:

$$\tilde{R} \triangleright \tilde{Q} = \int_A \frac{\int_C \mu_{\tilde{R} \triangleright \tilde{Q}}(a, c)}{a} = \iint_{A \times C} \frac{\mu_{\tilde{R} \triangleright \tilde{Q}}(a, c)}{(a, c)},$$

заданное на $A \times C$ с функцией принадлежности:

$$\mu_{\tilde{R} \triangleright \tilde{Q}}(a, c) = \sup_{b \in B} T(\mu_{\tilde{R}}(a, b), \mu_{\tilde{Q}}(b, c)), \quad (1)$$

где T – t -норма.

Подкомпозицией соответствий называется нечеткое соответствие:

$$\tilde{R} \triangleleft \tilde{Q} = \int_A \frac{\int_C \mu_{\tilde{R} \triangleleft \tilde{Q}}(a, c)}{a} = \iint_{A \times C} \frac{\mu_{\tilde{R} \triangleleft \tilde{Q}}(a, c)}{(a, c)},$$

заданное на $A \times C$ с функцией принадлежности:

$$\mu_{\tilde{R} \circ \tilde{Q}}(a, c) = \inf_{b \in B} I(\mu_{\tilde{R}}(a, b), \mu_{\tilde{Q}}(b, c)), \quad (2)$$

где I – импликатор.

Нечетким реляционным уравнением (левым) называется уравнение вида:

$$\tilde{X} \circ \tilde{\mathbf{R}} = \tilde{Y}, \quad (3)$$

где « $\circ$ » – символ композиции (подкомпозиции);

$\tilde{X}(A, B)$ – входное соответствие;

$\tilde{\mathbf{R}} = \tilde{R}(B, C) \circ \tilde{Q}(C, D) \circ \dots \circ \tilde{W}(G, H)$;

$\tilde{Y}(A, H)$ – выходное (замыкающее) соответствие с областью отправления A и областью прибытия H .

Пусть для уравнения вида (3) задана последовательность соответствий $\tilde{R}(B, C), \tilde{Q}(C, D), \dots, \tilde{W}(F, G)$ и правило композиции.

Прямой задачей называется задача нахождения представления выходного нечеткого соответствия $\tilde{Y}(A, H)$ при известном представлении входного нечеткого соответствия $\tilde{X}(A, B)$

Обратной задачей называется задача нахождения представления входного нечеткого соответствия $\tilde{X}(A, B)$ при известном представлении выходного нечеткого соответствия $\tilde{Y}(A, H)$.

Очевидно решение прямой задачи тривиально и может быть найдено по формулам (1) или (2).

2 Оптимизационная модель

Обратные задачи для систем уравнений с нечеткими соответствиями нетривиальны, обладают высокой трудоёмкостью и для практически значимых задач большой размерности часто имеют пустое множество решений.

Сформулируем экстремальную (оптимизационную) задачу, которая позволяет решать проблему поиска предпосылок при известных заключениях и определенных степенях истинности, заданных в виде нечетких соответствий.

$$(D, f): f(x) = \|y(x, \mathbf{r}) - \hat{y}\| \rightarrow \min, \\ D = \{0 \leq x \leq 1\}$$

где $\hat{y}$ – известное решение (наблюдаемые симптомы, заключения).

Семантическая интерпретация вводимых множеств и соответствий определяется исследуемой предметной областью.

3 Практическая реализация

Рассмотрим модель вида:

$$X \circ R \circ Q = \hat{Y}.$$

Пусть для конкретности:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix}; R = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.7 & 0.5 \\ 0.5 & 0.6 & 0.7 \\ 0.7 & 0.4 & 0.9 \end{pmatrix}; Q = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 & 0.7 & 0.5 \\ 0.7 & 0.3 & 0.8 & 0.7 \\ 0.8 & 0.8 & 1.0 & 0.9 \end{pmatrix}; \hat{Y} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.8 & 0.9 & 0.9 \\ 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Для простоты изложения используем в качестве примера *max-min* композицию, тогда, первая система из четырёх нечетких реляционных уравнений

$$\left\{ \max \left(\left[\min \left(x_{1i}, \max \left(\left[\min \left(r_{ik}, q_{kj} \right) : (k = \overline{1,3}) \right] : (i = \overline{1,3}) \right) \right] \right) = y_{1j} : (j = \overline{1,4}) \right\}$$

имеет решение (поиск решения занимает примерно три минуты в среде *Wolfram Mathematica* [3]):

$$(0 \leq x_{11} \leq 1 \parallel 0 \leq x_{12} \leq 1 \parallel 0.9 \leq x_{13} \leq 1)$$

У второй – каждое из уравнений имеет решение, но множество решений системы пусто.

Оптимальное решение задачи методом имитации отжига (продолжительность поиска, примерно, одна секунда) будет следующим:

$$X^0 = \begin{pmatrix} 0.00 & 1.00 & 0.95 \\ 0.07 & 0.14 & 0.68 \end{pmatrix}.$$

4 Выводы

Предложена методология сведения многоэтапной обратной задачи с нечеткими соответствиями к оптимизационной модели, что гарантирует нахождение решения задачи с минимальными затратами вычислительной мощности.

Список литературы:

1. Блюмин С. Л., Шуйкова И. А., Сараев П. В., Черпаков И. В. Нечеткая логика: алгебраические основы и приложения. Липецк: ЛЭГИ. 2002. 111с.
2. Осипов Г.С. Исследование соответствий в задаче нечеткой диагностики // «Вопросы современной науки»: коллект. науч. монография; [под ред. Е.Е. Еникеева]. М.: Изд. Интернаука, 2018. Т. 29. С. 41-62. DOI: [10.18411/InterNauka-2018-29](https://doi.org/10.18411/InterNauka-2018-29). idSP: <http://sp-identifier.ru/000001interNauka-2018-29>
3. Осипов Г. С., Вашакидзе Н. С., Филиппова Г. В. О решении обратных задач для нечетких соответствий в среде *Wolfram Mathematica* // Постулат. 2018. № 1. С. 42. DOI: [10.18411/Postulat-2018-1](https://doi.org/10.18411/Postulat-2018-1). idSP: <http://sp-identifier.ru/000001postulat-2018-1>.