Секция: Технические науки

УДК 519.816

ББК 32

Осипов Геннадий Сергеевич, д. тех. наук

Сахалинский государственный университет, г. Южно-Сахалинск

e-mail: Osipov@rambler.ru

АНАЛИЗ КОСВЕННЫХ МЕТОДОВ ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИЙ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ

Аннотация: Целью работы является сравнительный анализ наиболее известных косвенных методов построения функций принадлежности для формирования нечетких множеств. Предложена формализация проблемы в виде экстремальной задачи. Исследована задача обработки матрицы парных сравнений, содержащей согласованные мнения эксперта. Приведена практическая реализация методов синтеза функций принадлежности. Получена оценка расстояния Минковского между построенными нечеткими множествами.

Ключевые слова: нечеткие множества, функции принадлежности, парные сравнения

Введение

В настоящее время в различных областях деятельности человека широко используются системы поддержки принятия решений ядром которых являются нечёткие базы фактуальных и процедуральных знаний, основанные на применении лингвистических и нечетких переменных. Поэтому актуальной является задача получения и формализации знаний от экспертов и построения на их основе функций принадлежности для синтезируемых нечётких множеств

1. Постановка задачи

Дана матрица A парных сравнений альтернатив $u \in U$ по шкале Саати [1, 2].

$$A = \left(a_{ij} \right)_{i=1, \overline{n}}^{j=1, \overline{n}}; a_{ij} \in \mathbf{R}_+ : a_{ii} = 1; a_{ij} = \left(a_{ji} \right)^{-1} \forall i, j.$$

На основе этой матрицы требуется построить нечеткое множество

$$\tilde{F} = \int_U \frac{\mu_{\tilde{F}}(u)}{u} \text{ «оценка альтернативы»}.$$

Проведем сравнительный анализ основных косвенных методов построения функций принадлежности $\mu_{\tilde{F}}(u)$ элементов $u \in U$ нечеткому множеству $\tilde{F}$. Для краткости обозначим $x = \mu_{\tilde{F}}(u)$.

Очевидно, если значения функций принадлежности (априори) известны, то матрица парных сравнений имеет вид:

$$a_{ij} = \frac{x_i}{x_j} \left(i, j = \overline{1, n} \right).$$

2. Метод собственных чисел

Значения функции принадлежности принимаются равными компонентам собственного вектора матрицы A , соответствующего ее максимальному собственному числу.

В этом случае решается система вида:

$$Ax = \lambda_{\max} x.$$

При необходимости осуществляется нормализация нечеткого множества:

$$x_i := \frac{x_i}{\max_{j=1, \overline{n}} x_j} \left(i = \overline{1, n} \right).$$

Степень несогласованности парных сравнений (нетранзитивности матрицы A) определяется величиной

$$\varepsilon = \frac{\lambda_{\max} - n}{n} \cdot 100\%.$$

3. Решение экстремальной задачи

Построим целевую функцию:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - n x_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{i \neq j=1}^n a_{ij} x_j + (1-n) x_i \right)^2.$$

Сформулируем экстремальную задачу:

$$\begin{aligned} (D, f): f(x) \rightarrow \min, \\ D = \left\{ x \in \mathbf{R}_+^n : \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\}. \end{aligned} \quad (1)$$

Введем функцию Лагранжа с неопределенным множителем λ :

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda \left(1 - \sum_{i=1}^n x_i \right).$$

Тогда на основании (1) получим систему уравнений

$$\begin{cases} \sum_{i \neq k=1}^n \left(\sum_{k \neq j=1}^n a_{kj} x_j + (1-n)x_k \right) a_{ki} + \left(\sum_{i \neq j=1}^n a_{ij} x_j + (1-n)x_i \right) (1-n) - \frac{\lambda}{2} = 0 \quad (i = \overline{1, n}); \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \end{cases}.$$

Решением которой будут являться искомые значения функции $\mu_{\tilde{F}}(u)$.

4. Метод среднего геометрического

Значения функции принадлежности альтернатив нечеткому множеству $\tilde{F}$ могут быть оценены величиной:

$$x_i = \exp \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln a_{ij} \right) \quad (i = \overline{1, n}) \quad (2)$$

5. Согласованные парные сравнения

При согласованных мнениях эксперта матрица парных сравнений является:

обратно симметричной: $a_{ij} = (a_{ji})^{-1} \quad (i, j = \overline{1, n})$;

транзитивной: $a_{ik} \cdot a_{kj} = a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}} \quad (i, j, k = \overline{1, n})$.

Наличие этих свойств позволяет определить все элементы матрицы парных сравнений, если известны $(n-1)$ недиагональных элементов. Например, если известна k -тая строка, т. е. элементы $a_{kj} \quad (j = \overline{1, n})$, то остальные элементы определяются так:

$$a_{ij} = \frac{a_{kj}}{a_{ki}} \left(k \neq i = \overline{1, n-1}; j = \overline{i, n} \right); a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}} \left(k \neq i = \overline{2, n}; j = \overline{1, i-1} \right)$$

Можно показать [3], что в этом случае $\text{rang}(A)=1$, собственное число $\lambda = n$ и компоненты собственного вектора найдутся по формуле:

$$x_j = \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} \right)^{-1} \left(j = \overline{1, n} \right). \quad (3)$$

Очевидно компоненты собственных векторов, полученные по формулам (2) и (3) совпадают (после нормирования на единицу).

6. Пример

Пусть имеется следующая матрица парных сравнений альтернатив:

$$A = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & & & & & \\ & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ u_1 & 1 & 1/2 & 1/4 & 1/6 & 1/8 & 1/9 \\ u_2 & 2 & 1 & 1/3 & 1/5 & 1/7 & 1/8 \\ u_3 & 4 & 3 & 1 & 1/4 & 1/4 & 1/5 \\ u_4 & 6 & 4 & 4 & 1 & 1/3 & 1/3 \\ u_5 & 8 & 7 & 4 & 3 & 1 & 1/2 \\ u_6 & 9 & 8 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Максимальное собственное число матрицы $\lambda_{\max} = 6,285$, степень несогласованности $\varepsilon = 4,75\%$.

В данном случае нечеткое множество $\tilde{F}$ будет следующим:

$$\tilde{F}_0 = \left(\frac{0,072}{u_1} \quad \frac{0,100}{u_2} \quad \frac{0,205}{u_3} \quad \frac{0,442}{u_4} \quad \frac{0,742}{u_5} \quad \frac{1,000}{u_6} \right).$$

Выберем его в качестве эталонного для сравнения.

Решив экстремальную задачу (1), получим:

$$\tilde{F}_1 = \left(\frac{0,060}{u_1} \quad \frac{0,090}{u_2} \quad \frac{0,195}{u_3} \quad \frac{0,432}{u_4} \quad \frac{0,736}{u_5} \quad \frac{1,000}{u_6} \right).$$

По формулам (2) и (3), соответственно:

$$\tilde{F}_2 = \left(\frac{0,072}{u_1} \quad \frac{0,102}{u_2} \quad \frac{0,203}{u_3} \quad \frac{0,428}{u_4} \quad \frac{0,733}{u_5} \quad \frac{1,000}{u_6} \right).$$

$$\tilde{F}_3 = \left(\frac{0,076}{u_1} \quad \frac{0,093}{u_2} \quad \frac{0,156}{u_3} \quad \frac{0,298}{u_4} \quad \frac{0,589}{u_5} \quad \frac{1,000}{u_6} \right)$$

Оценим расстояние Минковского между нечеткими множествами

$$d_M(\tilde{F}_0, \tilde{F}_k) = \sqrt[p]{\left(\left| \mu_{\tilde{F}_0}(u) - \mu_{\tilde{F}_k}(u) \right|^p \right)} \quad (k = \overline{1,3}).$$

При $p=1,5$, получим:

$$d_M = (0,0284 \parallel 0,0187 \parallel 0,2518).$$

Очевидно, если исходная матрица составлена на базе согласованных мнений эксперта, то функции принадлежности, построенные по всем рассмотренным методам, совпадают.

Список литературы:

1. Саати Т. Л. Взаимодействие в иерархических системах / Т. Л. Саати // Техническая кибернетика. — 1979. — №1. — С. 68–84.
2. Ротштейн А. П. Нечеткий многокритериальный анализ вариантов с применением парных сравнений / А. П. Ротштейн, С. Д. Штовба // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. — 2001. — № 3. — С.150-154.
3. Осипов Г. С. Нечеткий рейтинг акций морских парокходств / Г. С. Осипов, Е. И. Распутина // Эксплуатация морского транспорта. — 2007. — № 2. — С. 10–13.