Фадеева О.В., Раков Д.В.

**Исследование зависимости фазовой траектории динамических систем от
вносимых возмущений на примере игры в хаос**

*ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет»
(Россия, Самара)*

doi:10.18411/sciencepublic-12-05-2020-08

idsp: sciencepublic-12-05-2020-08

Исследования последних десятилетий в различных областях математики ясно свидетельствуют о том, что негладкие функции обеспечивают значительно лучшее представление многих природных явлений, чем те, которые дают объекты классической геометрии. Фрактальная геометрия связана с изучением таких нерегулярных множеств.

Основной объект фрактальной геометрии – фракталы – находят применение во все больших областях науки, и сфера их применения еще до конца не раскрыта. Выясняется, что фрактальное строение способны иметь не только статические фигуры, но и фазовые портреты некоторых динамических систем – аттракторы различных хаотических процессов.

В данной работе была рассмотрена возможность приложения теории фракталов к проблемам анализа поведения нелинейных динамических систем (детерминированного хаоса).

В рамках исследования в Microsoft Excel была написана программа, реализующая уже известную в математике «игру в хаос». Программа повторяет процесс подбрасывания игровой кости и соответственно выпавшему результату расставляет точки на плоскости. При стремлении числа итераций «игры в хаос» к бесконечности происходит формирование фигур, имеющих фрактальное (самоподобное) строение. Этот процесс давно изучен математиками и позволяет получить вполне широкий набор «классических» конструктивных фракталов.

По результатам ряда исследований выявлено, что внесение возмущений (изменение начальных условий) в уже изученный хаотический процесс позволяет получить новые фигуры, имеющие фрактальное строение. Так, путём внесения знака модуля в основное уравнение для множества Мандельброта был получен фрактал «Burning ship». По аналогии с этим возникает вопрос: как схожие возмущения отразятся на процессе «игры в хаос»?

Наличие компьютерной программы позволяет несколько изменить процесс получения фигур в сравнении с классическим.

В ходе эксперимента автором перед приращением координат для каждой итерации были внесены различные функции, изменяющие значение приращения. В ряде опытов вносилась дополнительная функция случайного числа, которая сверх прочего увеличивала степень хаотичности получаемой картины.

Примем координаты каждой i -ой точки следующими:

$$\begin{cases} x_i = x_{i-1} + f\left(\frac{x_a - x_{i-1}}{2}\right), \text{ при } n = 1; 2 & y_i = y_{i-1} + f\left(\frac{y_a - y_{i-1}}{2}\right), \text{ при } n = 1; 2 \\ x_i = x_{i-1} + f\left(\frac{x_b - x_{i-1}}{2}\right), \text{ при } n = 3; 4 & y_i = y_{i-1} + f\left(\frac{y_b - y_{i-1}}{2}\right), \text{ при } n = 3; 4 \\ x_i = x_{i-1} + f\left(\frac{x_c - x_{i-1}}{2}\right), \text{ при } n = 5; 6 & y_i = y_{i-1} + f\left(\frac{y_c - y_{i-1}}{2}\right), \text{ при } n = 5; 6 \end{cases}$$

где n – выпавшее значение «игровой кости» (задается функцией случайного числа), $A(x_a; y_a)$, $B(x_b; y_b)$, $C(x_c; y_c)$ – точки, образующие треугольник, внутри которого выстраивается фигура, i – количество точек (итераций).

Добавленная в формулах функция f и будет задавать вносимое возмущение. Серии экспериментов по построению фигур с различными типами возмущений показали, что они способны сохранять фрактальное строение, причем являются при этом зачастую некими «искаженными» образами изначального фрактала – решета Серпинского. Можно проследить зависимость видоизменения от типа вносимого возмущения; какие-то фигуры лишь теряют строгий фрактальный вид, но некоторые искажаются целиком, формируя новые узоры и гладкие, местами напоминающие природные мотивы, формы (рис.1).

Полученные результаты четко зависят и от степени хаотичности системы. Так, приближение итераций к аттрактору напрямую связано с тем, сколь большой диапазон функции случайного числа был внесен перед приращениями координат. В качестве демонстрации такого свойства фазовых траекторий поставим функции случайного числа перед приращением координаты X :

$$x_i = x_{i-1} + A \cdot RND\left(\frac{x_a - x_{i-1}}{2}\right), \text{ при } n = 1; 2,$$

где A – максимальное целое положительное случайное число, RND – функция случайного числа.

Рис.1. Фазовые траектории при различных типах возмущений ($f = |x|; \cos(x); \sin(x); \operatorname{tg}(x)$)

Изменяя значение A можно проследить, как именно фазовая траектория стремится к хаосу вместе с ростом хаотичности итераций системы (рис.2). При значениях $A > 10$ фазовая траектория перестает быть ограниченной и хаотично располагается во всех четвертях координатной плоскости.

На основе полученных данных можно сделать заключение о перспективах изучения хаотических процессов с точки зрения управления хаосом и анализа возмущений в этих процессах по уже имеющимся картинкам: рассматривая временную реализацию случайного процесса как хаотический процесс и применяя к ней методы нелинейной динамики, получаем возможность реконструировать фазовое пространство и аттрактор нелинейных динамических систем.

Рис.2. Изменение фазовой траектории с ростом хаотичности итераций

При этом неустойчивость фазовой траектории, свидетельствующая о чувствительности системы к управлению, дает возможность с помощью серии малозаметных возмущений и их экспоненциальных накоплений в значительной мере корректировать траекторию в фазовой плоскости.

1. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. – Москва: Институт компьютерных исследований, 2002, 656 стр.
2. Морозов А. Д. Введение в теорию фракталов. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002, 160 стр.
3. Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. – Москва: Постмаркет, 2000, 352 стр.
4. Шрёдер М. – Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001, 528 стр.