РАЗДЕЛ III. МАТЕМАТИКА

Гасанов М.В.

Тестирование одного класса нелинейных дифференциальных уравнений в окрестности подвижной особой точки

*Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет
(Россия, Москва)*

doi:10.18411/sciencepublic-12-05-2020-06

idsp: sciencepublic-12-05-2020-06

Аннотация

Нелинейные дифференциальные уравнения мало изучены в отличие от линейных, при этом классическая теория к нелинейным уравнениям неприменима ввиду наличия подвижных особых точек. Это обстоятельство требует развития новых подходов к решению нелинейных дифференциальных уравнений. В одной из авторских работ дано развитие технологии модификации метода мажорант, эффективно применяемого для решения нелинейных дифференциальных уравнений с подвижными особыми точками. В данной работе приводится тестирование полученных ранее теоретических результатов на уравнении в общем случае не разрешимом в квадратурах. Приведены результаты численного эксперимента.

Введение

Нелинейные дифференциальные уравнения имеют достаточно широкое применение в различных областях науки и техники, например: в теории эволюционных процессов [1-3], теория устойчивости элементов строительных сооружений и анализ живучести (жизнестойкости) зданий [4-5], в задачах строительной механики [6-15] и других областях [16-17].

Данный класс уравнений имеет существенную особенность, наличие подвижной особой точки. Этот факт требует новых подходов в решении основных задач для нелинейных дифференциальных уравнений. В работе [17] была доказана теорема существования и единственности решения рассматриваемого класса уравнений, получено аналитически приближенное решение. В отличие от варианта численного эксперимента работы [17], где рассматривался случай $r(x) = 0$, в настоящей работе рассматривается случай $r(x) \neq 0$ и имеем уравнение не разрешимое в квадратурах.

Постановка задачи и результаты тестирования

В работе [17] рассматривается класс нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка с полиномиальной правой частью седьмой степени в окрестности подвижной особой точки, приведенный к нормальному виду (1):

$$y''' = y^7 + r(x), \quad (1)$$

Рассматривалась задача Коши для уравнения (1) с начальными условиями (2):

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_1, \\ y''(x_0) = y_2. \end{cases} \quad (2)$$

Была доказана теорема существования и единственности в окрестности подвижной особой точки со структурой решения (3):

$$y_N(x) = (x^* - x)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^N C_n (x^* - x)^{\frac{n}{2}}. \quad (3)$$

В ходе доказательства теоремы была получена рекуррентная формула для нахождения коэффициентов разложения в ряд:

$$1) -(n-1)(n-3)(n-5)C_n = 8 \left(C_n^{****} + A_{\frac{n-7}{2}} \right), \text{ при } n = 2k+1, k = 3, 4, \dots; \quad (4)$$

$$2) -(n-1)(n-3)(n-5)C_n = 8C_n^{****}, \text{ при } n = 2k, k = 0, 1, \dots \text{ и при } n = 1, 3, 5.$$

Для расчета коэффициентов использовался математический пакет Maple.

Решением второй задачи в работе [17] явилась априорная оценка для аналитического приближенного решения (3):

$$\Delta y_N(x) = |y(x) - y_N(x)| = \Delta, \quad (5)$$

где

$$\Delta \leq \frac{8M(M+1)^{2(N+1)}}{1 - (M+1)^6 |x^* - x|^{\frac{3}{2}}} |x^* - x|^{\frac{N}{2}} \left(\frac{1}{N(N-2)(N-4)} + \frac{|x^* - x|^{\frac{1}{2}}}{(N+1)(N-1)(N-3)} + \frac{|x^* - x|}{(N+2)N(N-2)} \right)$$

в случае $N+1 = 3k$,

$$\Delta \leq \frac{8M(M+1)^{2N}}{1 - (M+1)^6 |x^* - x|^{\frac{3}{2}}} |x^* - x|^{\frac{N}{2}} \left(\frac{1}{N(N-2)(N-4)} + \frac{|x^* - x|^{\frac{1}{2}}}{(N+1)(N-1)(N-3)} + \frac{|x^* - x|}{(N+2)N(N-2)} \right)$$

для варианта $N+1 = 3k+1$, и

$$\Delta \leq \frac{8M(M+1)^{2(N-1)}}{1 - (M+1)^6 |x^* - x|^{\frac{3}{2}}} |x^* - x|^{\frac{N}{2}} \left(\frac{1}{N(N-2)(N-4)} + \frac{|x^* - x|^{\frac{1}{2}}}{(N+1)(N-1)(N-3)} + \frac{|x^* - x|}{(N+2)N(N-2)} \right)$$

$$\rho_2 = \min \left\{ \rho_1, \frac{1}{(M+1)^4} \right\}, M = \sup_n \left\{ \frac{|r^{(n)}(x^*)|}{n!} \right\}, n = 0, 1, 2, \dots$$

для $N+1 = 3k+2$, где

ρ_1 — константа, такая, что $|x^* - x| < \rho_1$, $\rho_1 > 0$.

Численный эксперимент

Рассмотрим задачу Коши (1)—(2),

где $r(x) = x^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 1$, $x^* = 0.92879$.

В данном случае задача не разрешима в квадратурах. Результаты расчетов для задачи Коши (1)—(2) представлены в таблице 1,

Таблица 1

Числовые характеристики аналитически приближенного решения.

x_1	$y_8(x_1)$	Δ_1	Δ_2
0.92	11.8449	0.03	0.005

где $y_8(x_1)$ – аналитическое приближенное решение (3); Δ_1 – априорная оценка; Δ_2 – апостериорная оценка. Для $\Delta_2 = 0.005$ по теореме 2, работа [17], определяем $N = 15$. Слагаемые с 9 по 15 в общей сумме не превышают требуемой точности — $\varepsilon = 0.005$, следовательно, при $N = 8$ получаем значение $y_8(x_1)$ с точностью $\varepsilon = 0.005$.

Вывод

В данной работе протестированы теоретические результаты, полученные ранее, и рассмотрены варианты уравнения, когда $r(x) \neq 0$, имеем случай задачи Коши не разрешимой в квадратурах. Представлены результаты численного эксперимента, в котором мы имеем полный набор параметров, необходимых для оптимизации оценок.

1. Axford R. A. Differential equations invariant under two-parameter Lie groups with applications to nonlinear diffusion // Los Alamos Report. 1970. (LA – 4514, UC – 34)
2. Airault H. Rational Solutions of Painleve Equations // Studies in applied mathematics. 1979. V. 61. No 1. July. P. 31–53.
3. Ablowitz M. I. Exact linearization of a Painleve transcendent // Phys. Rev. Lett. 1977. V. 38, No 20. P. 1103–1106
4. Kovalchuk O. A. Simulation of the State of the Rod Elements of the Building Construction // Procedia Engineering. 2016. V. 153. №2. P. 304–309.
5. Ковальчук О. А. Устойчивость стержневых элементов строительных конструкций // Журнал ПГС. 2014. №11. С. 53– 54.
6. Ковальчук О. А. О расчете зданий с ядрами жесткости // Естественные и технические науки. 2015. №3 (81). С.238– 240
7. Орлов В. Н. Метод приближенного решения первого, второго дифференциальных уравнений Пенлеве и Абеля. М.: МПГУ, 2013. 174 с.
8. Орлов В. Н. Исследование приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности подвижной особой точки // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Серия: Естественные науки. 2009. № 4 (35). С. 23–32.
9. Orlov V. N., Kovalchuk O.A. Research of one class of nonlinear differential equations of third order for mathematical modelling the complex structures (WoS)// IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 365, 2018.
10. Orlov V. N., Kovalchuk O.A., Linnik E.P., Linnik I.I. Research into a Class of Third-Order Nonlinear Differential Equations in the Domain of Analyticity(Scopus)// Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Bauman, Estestv. Nauki [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2018, no. 4, pp. 24–35 (in Russ.)
11. Orlov V. N., Kovalchuk O.A. Mathematical modeling of complex structures and nonlinear differential equations with movable points (WoS)// IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 456 (2018) 012122 IOP Publishing.
12. Orlov V. N., Kovalchuk O.A. Mathematical problems of reliability assurance the building constructions// E3S Web Conf. Volume 97, 03031, 2019. XXII International Scientific Conference “Construction the Formation of Living Environment” (FORM-2019)
13. Orlov V. N., Kovalchuk O.A. An analytical solution with a given accuracy for a nonlinear mathematical model of a console-type construction (Scopus)// Modelling and Methods of Structural Analysis IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1425 (2020) 012127 IOP Publishing.
14. Chichurin A. On the theory of constructing a numerical-analytical solution of a cantilever beam bend nonlinear differential equation of the first order (Scopus)// Modelling and Methods of Structural Analysis IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1425 (2020) 012129 IOP Publishing.
15. Feng Yuqiang ,Existence and uniqueness results for a third-order implicit differential equation, Computers and Mathematics with Applications 56 (2008) 2507–2514
16. Орлов В. Н., Леонтьева Т.Ю. О расширении области для аналитического приближенного решения одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка в комплексной области // Вестник Самарского Гос. техн. университета. Сер. Физ.-мат. науки, 2020. Т 2doi:10.14498/vsgtu1727
17. Орлов В. Н., Гасанов М. В. Теорема существования решения одного класса нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка с полиномиальной правой частью седьмой степени в окрестности подвижной особой точки. //Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 1 (43). С. 89–95 10.37972/chgpu.2020.43.1.011