РАЗДЕЛ IX. МАТЕМАТИКА

Малаев Д.Д.

Трехмерное межскважинное просвечивание в слоистой среде: информативность и устойчивость*Казахстанско-Британский технический университет
(Казахстан, Алматы)*

doi 10.18411/scc-30-09-2017-15

idsp 000001:scc-30-09-2017-15

1. Введение и постановка задачи.

В данной работе рассматривается одна из наиболее распространённых и важных задач изучения внутреннего строения Земли – межскважинное просвечивание (Рис.1а). Для того, чтобы сосредоточиться на принципиальных вопросах, связанных с построением численного решения рассматривается простейшая ситуация – слабое возмущение однородной среды. При этом для численной реализации первоначально производится сеточная аппроксимация, когда в каждой элементарной ячейке задаётся возмущение скорости δC^{MN} , которое, в свою очередь, приводит к возмущению времени распространения сигнала от источника i к приемнику j (см. Рис. 1 б).

Рисунок 1. А) Схема наблюдения и траектории лучей для межскважинного просвечивания. Б) Геометрия задачи

В итоге возникает система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных малых поправок:

$$-\frac{1}{C_0} \sum_{M,N} L_{ij}^{MN} \delta C^{MN} = \delta T_{ij}$$

Её правая часть есть вектор задержки времен распространения. Как видно из рис. 1б, матрица определяется своими элементами L_{ij}^{MN} , каждый из которых представляет собой часть отрезка соединяющего приемник i и источник j , попадающую часть в клетку MN .

2. Численное решение системы линейных алгебраических уравнений.

В силу некорректности исходной задачи, построенная матрица обязана быть плохо обусловленной, что подтверждается характером поведения её сингулярного спектра, изображённого на Рис.2а. Как видно, начиная примерно с пятидесятого номера наблюдается стремительное уменьшение сингулярных чисел и сингулярные числа с большими номерами очень быстро превышают двойную машинную, становясь меньшими, чем 10^{-16} . В то же время, в соответствии с известным соотношением, описывающим связь нормы ошибки решения δx и уровень погрешности δf в правой части для общей системы линейных алгебраических уравнений $Ax=f$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \text{cond} \frac{\|\delta f\|}{\|f\|}$$

возникает чёткое соотношение, связывающее уровень помехи ε , погрешность δ и число обусловленности cond :

$$\text{cond} \leq \delta / \varepsilon$$

которое и было заложено в алгоритме. А именно, данное соотношение ограничивает возможную обусловленность при заданном уровне помехи и желаемом уровне точности решения. В то же время, ограничение числа обусловленности однозначно определяет усечение сингулярного разложения томографической матрицы, выбранного нами в качестве регуляризующей процедуры (см. (Чеверда и Костин, 1997)).

Рисунок 2. А) Поведение сингулярных чисел томографической матрицы б) Траектории лучей, соединяющих источники и приемники.

3. Численные эксперименты. Для проведения численных расчётов была выбрана модель «сфера», представляющая фигуру сферы из клеток с постоянной скоростью (Рис.3а), а система наблюдения состояла из разных количеств источников и приёмников, расположенных на противоположных сторонах целевой области. На Рис. 2б приведены траектории лучей, соединяющих источники и приёмники. Заметим, что наибольшую плотность эти траектории имеют в центре области, обеспечивая наиболее полное покрытие её центральной части.

Результаты реконструкции данного теста представлены на Рис.2а – 2г для различного уровня помех во входных данных. Как видно, в первую очередь решение начинает «разрушаться» с самых плохо освещённых областей целевой области – по её углам.

Закключение. Предложен и реализован численный метод решения плохо обусловленной системы линейных алгебраических уравнений на основе усечения сингулярного разложения. Метод выгодно отличается от широко известного метода регуляризации по Тихонову простотой вычисления параметра регуляризации, который однозначно определяется помехой данных и желаемой точностью решения.

а)

б)

в)

г)

Рисунок 3. Результаты восстановления на сетке $10 \times 10 \times 10$. а) 9 источников и 9 приемников б) 25 источников и 25 приемников в) 49 источников и 49 приемников г) 100 источников и 100 приемников

Благодарности

Считаю своим приятным долгом выразить благодарность профессорам КБТУ Решетовой Г.В. и Чеверде В.А. за постановку задачу и помощь в проведении исследований.

1. Костин В.И., Чеверда В.А. г-решения уравнения первого рода с компактным оператором в гильбертовых пространствах: существование и устойчивость // Доклады РАН. – 1997. – т.355(3). – 308 – 312.
2. Crosswell Electromagnetic Resistivity Imaging: Illuminating the Reservoir. 2006. Middle East Asia Reservoir Review. Available from: http://www.slb.com/~media/Files/resources/mearr/num7/illuminating_reservoir.pdf