Определение плотности теплового потока на поверхности мерзлого грунта из решения обратной задачи

*Винокурова Т.А., м.н.с.,
Институт мерзлотоведения им. П.И. Мельникова СО РАН,
г. Якутск
E-mail: tatyana_umka91@mail.ru*

*Пермяков П.П., д.ф.-м.н.,
Институт физико-технический проблем Севера им. В.П. Ларионова СО РАН
г. Якутск
E-mail: permyakov2005@mail.ru*

В данной работе предполагается определить тепловой поток на поверхности грунта, из решения граничной обратной задачи для уравнения теплопроводности при формировании наледи, используя в качестве исходной информации замеры температуры грунтов. Граничная обратная задача промерзания – протаивания мерзлого грунта является нелинейной, и минимизация функционала невязки осуществляется методом сопряженных градиентов, который относится к классу итерационных регуляризирующих численных алгоритмов.

Математическая формулировка задачи может быть представлена в следующем виде [4]:

$$c^\beta \rho^\beta \frac{\partial T^\beta}{\partial \tau} = \frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda^\beta r^n \frac{\partial T^\beta}{\partial r} \right), R_1 < r < R_N, 0 < \tau \leq \tau_m, \beta = \overline{1, N}, \quad (1)$$

$$\lambda^\beta \frac{\partial T^\beta}{\partial r} = 0, r = R_N, 0 < \tau \leq \tau_m, \quad (2)$$

$$T^\beta(r, 0) = T_0^\beta(r), R_1 \leq r \leq R_N, \beta = \overline{1, N}, \tau = 0. \quad (3)$$

где c – эффективная теплоемкость грунта с учетом фазового перехода в спектре температур, Дж/(кг·К); ρ – плотность грунта, кг/м³; T – температура, К; λ – теплопроводность грунта, Вт/(м·К), τ – время, с; r – пространственная координата, м; $n = 0, 1, 2$ – соответствует декартовой, цилиндрической и сферической координатам; β – индекс слоя; R_1, R_2 – границы области, м; τ_m – правое граничное значение временного интервала.

На стыке двух слоев добавляется условия сопряжения и требуется определить граничное условие 2 рода на поверхности грунта ($s=1$) при $r = R_1$:

$$-\lambda^1 \frac{\partial T^1}{\partial r} = q(\tau), r = R_1, 0 < \tau \leq \tau_m, \quad (4)$$

где искомым параметром является функция $u(\tau) = q(\tau)$. Для определения искомого параметра нужны дополнительные замеры температуры внутри исследуемого образца:

$$T(r_i, \tau) = T_i^\tau(\tau), i = \overline{1, n_m}. \quad (5)$$

Данную задачу сформулируем как задачу оптимального управления: найти функцию $u(\tau)$ из минимума целевого функционала:

$$J(u) = \sum_{i=1}^{n_m} \int_0^{\tau_m} p_i(\tau) (T(r_i, \tau) - T^\tau(r_i, \tau))^2 d\tau \quad (6)$$

где $p_i(\tau)$ – весовые множители с размерностью $K^{-2} \cdot c^{-1}$; $T(r_i, \tau), T^\tau(r_i, \tau)$ – расчетная и измеренная температуры в i -й точке мерзлого массива.

Обратные задачи теплообмена относят к классу некорректно поставленных задач математической физики, и основной трудностью их решения заключается в отсутствии непрерывной зависимости результатов от входных данных. Для подобных задач применяются специальные методы решения, и наиболее эффективными являются итерационные алгоритмы, построенные на основе градиентных методов [1, 2, 3, 8].

В данной работе используется метод сопряженных градиентов, являющийся одним из наиболее эффективных градиентных методов. В данном методе итерационная последовательность строится с учетом предыдущего направления спуска, процедура расчета состоит в следующем: начиная от некоторой точки u^0 осуществляется движение в направлении антиградиента до минимума, который достигается в точке u^1 . Затем определяется направление, сопряженное предыдущему, по которому происходит переход в следующую минимальную точку. В результате определяется новое приближение u^2 , и так далее.

Важной особенностью сопряженных градиентов является то, что число итераций для достижения точного минимума квадратичной функции теоретически равно m – размерности искомого вектора. На практике за счет ошибок, которые появляются в ходе вычисления, сходимость метода ухудшается, для этого рекомендуется «взбадривание» итерационного процесса, это позволяет несколько снизить накопление вычислительных ошибок.

Итерационные (экстремальные) методы решения граничных обратных задач, в настоящее время, эффективно применяется в различных прикладных исследованиях, и экспериментальной обработке натурных мониторинговых данных в геокриологии [2, 4, 5, 7, 8].

С помощью предложенного алгоритма определены плотности теплового потока, при формировании наледи в долине Улахан-Тарына. Длина наледи около 3 км, ширина 120-800 м.

Наблюдение произведено на трех различных стационарных площадках: 1 – наледь; 2 – еловый лес в наледной долине; 3 – сосновый лес на водоразделе, а также на площадке «Луг» в г. Якутске, на надпойменной террасе левобережья долины р. Лены.

Предложенный алгоритм можно использовать для определения плотности теплового потока в мерзлых грунтах, при моделировании термического режима, как в естественных, так и нарушенных условиях. Результаты вычислительных экспериментов показывают высокую эффективность метода итеративной регуляризации и возможность решения с его помощью широкого спектра нелинейных задач.

Список литературы:

1. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1998. – 288 с.
2. Алифанов О. М., Будник С. А., Ненарокомов А. В., Netelev A. В., Титов Д. М. Деструктивные материалы тепловых характеристик определение с применением для космической техники испытания // Астронавтика, Объем 85, Апрель-Май, 2013, стр. 113-119.
3. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. – М.: Изд-во ЛКИ, 2009. – 480 с.

4. Пермяков П.П., Афанасьева Т.А., Варламов С.П., Скрыбин П.Н. Об эффективности восстановления граничных условий при моделировании теплового режима мерзлых грунтов // Вестник Забайкальского государственного университета, 2017. Т. 23, № 5. С. 27 – 35.

5. Пермяков П.П., Афанасьева Т.А., Варламов С.П., Скрыбин П.Н. Определение граничных условий при моделировании термического режима мерзлых грунтов. // Вестник Северо-Восточного научного центра ДВО РАН, 2018, №1(53), с. 56 – 62.

6. Пермяков П.П., Варламов С.П., Скрыбин П.Н., Скачков Ю.Б. Численное моделирование термического состояния криолитозоны в условиях меняющегося климата // Наука и образование. 2016. № 2. С. 43-48.

7. Danaila S., Chira A. Mathematical and numerical modeling of inverse heat conduction // Incas Bulletin, 2014, Volume 6, Issue 4, pp. 23-39.

8. Hamidreza Najafi, Woodbury K.A., Beck J.V. A filter based solution for inverse heat conduction problems in multi-layer mediums // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2015. – Vol. 83. – P. 710 – 720.