НОВАЯ МЕТОДОЛОГИЯ РАСЧЁТОВ ТРАЕКТОРИЙ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛ: КАК СОГЛАСОВАТЬ ПОНЯТИЕ ОБ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ ОТСЧЁТА В КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ С ДВИЖЕНИЕМ СОЛНЦА ВОКРУГ МЛЕЧНОГО ПУТИ?

NEW METHODOLOGY OF CALCULATIONS OF THE TRAJECTORIES OF THE BODY MOTIONS: HOW CAN WE USE TERM “INERTIAL BASE” AND KNOW THAT THE SUN IS TURNING AROUND THE MILKY WAY?

РУМЯНЦЕВ Л.А.

RUMYANTSEV L.A.

*Научно-Исследовательский Институт
физики Южного Федерального
Университета*

*Institute of Physics of the South Federal
University*

leo12345678901@gmail.com

leo12345678901@gmail.com

doi: 10.18411/pivsn-49

idsp: pivsn-49

АННОТАЦИЯ

Одним из главных вопросов, поднимаемых в этой статье, является переход от классической механики к Общей Теории Относительности для гелиоцентрической системы отсчёта. В этой статье рассматриваются геоцентрическая и гелиоцентрическая система. Так как Солнце вращается вокруг Млечного Пути, то гелиоцентрическая система неинерциальна и геоцентрическая система – тоже неинерциальна в классической механике. Обе системы в классической механике “плохие” неинерциальные – в этом и состоит суть данной работы. В Общей же Теории относительности обе системы – гелиоцентрическая и геоцентрическая – являются “хорошими”. Во второй половине статьи подробнейшим образом рассматриваются новейшие представления Эйнштейна и других ученых (например, Карла Шварцшильда) о движении Земли вокруг Солнца – потому что с созданием Общей Теории Относительности был сделан громадный шаг вперед. В астрономии таких шагов было два: первый – это был переход от модели Клавдия Птолемея с эпициклами (кстати, Клавдий Птолемей, как и Иоганн Кеплер, был просто астрономом, он не разрабатывал небесную механику) к Ньютоновско-Галилеевской небесной механике, и второй шаг – от Ньютоновско-Галилеевской небесной механики до Общей Теории Относительности, которая была разработана Альбертом Эйнштейном, Карлом Шварцшильдом и многими другими учеными. Кроме того, поднимается вопрос о реальных астрофизических данных, необходимых для подтверждения таких новейших сверхточных расчетов.

Ключевые слова: небесная механика, астрономия.

ABSTRACT

The main point of this paper is the transition from classical mechanics to General Theory of Relativity for heliocentric framework. We discuss geocentric and heliocentric frameworks in this paper. We know that Sun rotates around Milky Way so heliocentric framework is noninertial base and geocentric framework is noninertial base, too, in classical mechanics. Both systems are “bad” noninertial base in classical mechanics – that is the meaning of this paper. Then we go to the General Theory of Relativity and see that both two systems are “good”. Second part of this paper is physics in the heliocentric system in General Theory of Relativity. Albert Einstein, Karl Schwarzschild and many other scientists used a

new representation about rotation of Earth around Sun because the creation of General Theory of Relativity is a huge step forward. There are two such steps in astronomy: the first step is the transition from Claudius Ptolemy's model with epicycles (by the way, Claudius Ptolemy and Johannes Kepler are just astronomers, they didn't create celestial mechanics) to Newton-Galilei celestial mechanics and the second step is the transition from Newton-Galilei celestial mechanics to General Theory of Relativity created by Albert Einstein, Karl Schwarzschild and many other scientists. We also discuss the real astrophysical data that are seriously needed to confirm this new precise calculations.

Keywords: celestial mechanics, astronomy.

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, в классической (ньютоновской) механике существуют два типа системы отсчета, а именно неинерциальные системы и инерциальные (галилеевы) системы отсчета.

Начнем с главного допущения, на который опирается старая, ложная методология преподавания классической механики – гелиоцентрическая система отсчета, которую Галилео Галилей считал инерциальной (а вместе с тем так же считает множество сторонников старой, ложной методологии).

Согласно [2], Солнце – это звезда, которая обращается вокруг Млечного Пути! Значит, гелиоцентрическая система отсчета – это неинерциальная система отсчета, и даже если запустить гипотетический спутник на гелиостационарную орбиту ближе Меркурия как измерительный прибор, всё равно надо признать – инерциальная (галилеева) система отсчета с абсолютным нулем всех сил инерции так же недостижима в современной экспериментальной физике, как и абсолютный нуль (- 273,16 °C) по температуре.

ЦЕЛЬ ИССЛЕДОВАНИЯ

В данной работе будет найдена угловая скорость вращения Солнца вокруг Млечного Пути. Затем написана новая методология в трёх пунктах, где и геоцентрическая, и гелиоцентрические системы отсчёта являются «плохими», а «хорошая» инерциальная система недостижима экспериментально. И в конце, в противоположность классической механике, также будут представлены расчёты в Общей Теории Относительности, где, в отличие, от классической механики, никакая система отсчёта не является «плохой» - и геоцентрическая, и гелиоцентрические системы отсчёта являются «хорошими».

Итак, есть система отсчета, в которой мы можем проводить измерения, но она неинерциальна. Какие же силы инерции могут действовать на тело в этой системе? Их четыре, согласно учебнику Сивухина [7] по общей физике:

1) Существует сила инерции из-за того, что неинерциальная система движется поступательно со скоростью $\vec{v}_0$ и с ускорением $\vec{a}_{in}(t)$ относительно инерциальной системы отсчета. Тогда сила, действующая на тело с учетом этой силы инерции, запишется как:

$$m(\vec{a} - \vec{a}_{in}(t)) = \vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}_{in}, \text{ т.е. } \vec{F}_{in} = -m\vec{a}_{in}(t).$$

Далее мы перейдем к другому обозначению: $\vec{a}_{in} = \dot{\vec{v}}_0$.

2) Существуют силы инерции из-за того, что неинерциальная система вращается относительно инерциальной системы отсчета с угловой частотой $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$.

2.а. Центробежная сила инерции.

За время Δt $\alpha = \omega \Delta t$. Далее,

$|\Delta \vec{v}| = |\vec{v}| \cdot \sin \alpha \approx |\vec{v}| \cdot \alpha = |\vec{v}| \cdot \omega \cdot \Delta t$. Отсюда

$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v \omega \Delta t}{\Delta t} = v \cdot \omega$. Но $\frac{1}{v_T} = T = \frac{2\pi R}{v}$ (здесь v_T - частота вращения, а v - скорость материальной точки), т.е.

$\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi R}{v} \Rightarrow \frac{1}{\omega} = \frac{R}{v} \Rightarrow \omega = \frac{v}{R}$, т.е. $a = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$ - **центростремительное ускорение**.

В векторном виде $\vec{a}_{\text{centripetal}} = -\omega^2 \vec{R}$. Если же не прикладывать центростремительную силу

$\vec{F}_{\text{centripetal}} = m \vec{a} = -m \omega^2 \vec{R}$, то в неинерциальной системе отсчета на тело начинает действовать центробежная сила $\vec{F}_{\text{centrifugal}} = m \omega^2 \vec{R}$.

2.6. Сила Кориолиса.

Рассмотрим систему отсчета S , движущуюся относительно неподвижной системы отсчета S_1 . Это движение можно разложить на два: *поступательное движение* со скоростью $\vec{v}_0$, равной скорости движения начала координат O , и *вращательное движение* вокруг мгновенной оси, проходящей через это начало координат в определенный момент времени t , с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Ясно, что в произвольном случае $\vec{v}_0 = \vec{v}_0(t)$ и $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$.

Пусть x, y, z – координаты движущейся материальной точки M в движущейся системе S . Тогда

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (0.1)$$

продифференцируем радиус-вектор материальной точки M по времени один раз:

$$\dot{\vec{r}} = (\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}) + (x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt}) = \vec{v}_{om} + [\vec{\omega}, \vec{r}], \quad (0.2)$$

ведь известно, что

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{i}], \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{j}], \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{k}]. \quad (0.3)$$

Здесь $\vec{v}_{om}$ - скорость движущейся точки M относительно движущейся системы S . Тогда

$$\vec{v}_{abs} = \vec{v}_{om} + \vec{v}_{per}, \quad \text{где} \quad (0.4)$$

$$\vec{v}_{per} = \vec{v}_0 + [\vec{\omega}, \vec{r}]. \quad (0.5)$$

$\vec{v}_0$, как об этом говорилось ранее, это скорость начала координат O системы S относительно инерциальной системы. $\vec{v}_{per}$ - это скорость, которая была бы абсолютной скоростью точки M , если бы она покоилась в системе S . Поэтому она и называется переносной скоростью.

Теперь найдем абсолютное ускорение (поскольку расчеты проводятся в классической механике, dt не меняется при переходе от одной системы отсчета к другой). Тогда

$$\vec{a}_{abs} = \dot{\vec{v}}_{abs} = \dot{\vec{v}}_{om} + \dot{\vec{v}}_0 + [\vec{\omega}, \dot{\vec{r}}] + [\dot{\vec{\omega}}, \vec{r}]. \quad (0.6)$$

Далее, $\dot{\vec{v}}_{om} = (\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k})_t = (\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}) + (\dot{x}\frac{d\vec{i}}{dt} + \dot{y}\frac{d\vec{j}}{dt} + \dot{z}\frac{d\vec{k}}{dt})$
 $= \vec{a}_{om} + [\vec{\omega}, \vec{v}_{om}]$, где

$$\vec{a}_{om} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}. \quad (0.7)$$

Умножая выражение (1.2) слева векторно на $\vec{\omega}$, находим:

$$[\vec{\omega}, \dot{\vec{r}}] = [\vec{\omega}, \vec{v}_{om}] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]] . \quad (0.8)$$

В итоге получим:

$$\vec{a}_{abs} = \vec{a}_{om} + 2[\vec{\omega}, \vec{v}_{om}] + \dot{\vec{v}}_0 + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]] + [\dot{\vec{\omega}}, \vec{r}] \quad (0.9)$$

, или

$$\vec{a}_{abs} = \vec{a}_{om} + \vec{a}_{kor} + \vec{a}_{per} , \text{ где} \quad (0.10)$$

$$\vec{a}_{kor} = 2[\vec{\omega}, \vec{v}_{om}] , \quad (0.11)$$

$$\vec{a}_{per} = \dot{\vec{v}}_0 + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]] + [\dot{\vec{\omega}}, \vec{r}] . \quad (0.12)$$

Формулы (1.10), (1.11) и (1.12) называются **теоремой Кориолиса**. Далее ясно, что

$$\vec{a}_{om} = \vec{a}_{abs} - \vec{a}_{kor} - \vec{a}_{per} . \quad (0.13)$$

Значит,

$$\vec{F}_{kor} = m \cdot (-\vec{a}_{kor}) \text{ и} \quad (0.14)$$

$$\vec{F}_{in2} = m \cdot (-\vec{a}_{per}) \quad (0.15)$$

- это силы инерции. Итак, **сила Кориолиса** – это

$$\vec{F}_{kor} = -m\vec{a}_{kor} = -2m[\vec{\omega}, \vec{v}_{om}] = 2m[\vec{v}_{om}, \vec{\omega}] . \quad (0.16)$$

Как известно, существует формула Лагранжа для двойного векторного произведения (правило “бац минус цаб”):

$$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) . \quad (0.17)$$

Поэтому $[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]] = \vec{\omega} \cdot (\vec{\omega}, \vec{r}) - \vec{r} \cdot (\vec{\omega}, \vec{\omega}) = \vec{\omega} \cdot (\vec{\omega}, \vec{r}) - \omega^2 \vec{r}$. Далее, пусть $\vec{r} = \vec{r}_\perp + \vec{r}_\parallel$, где одна из двух составляющих радиус-вектора $\vec{r}_\perp$ перпендикулярна к $\vec{\omega}$, а вторая составляющая

$\vec{r}_\parallel$ параллельна $\vec{\omega}$.

Тогда $[\vec{\omega}, \vec{r}_\parallel] = 0 \Rightarrow [\vec{\omega}, \vec{r}] = [\vec{\omega}, \vec{r}_\perp]$, т.е.

$$[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]] = [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}_\perp]] = \vec{\omega} \cdot (\vec{\omega}, \vec{r}_\perp) - \vec{r}_\perp \cdot (\vec{\omega}, \vec{\omega}) = -\omega^2 \vec{r}_\perp = \vec{a}_{centripetal} .$$

Это центростремительное ускорение, часть переносного ускорения. Тогда

$$\vec{a}_{om} = \vec{a}_{abs} - \vec{a}_{kor} - \vec{a}_{per} = \vec{a}_{abs} - \dot{\vec{v}}_0 + \omega^2 \vec{r}_\perp + 2[\vec{v}_{om}, \vec{\omega}] - [\dot{\vec{\omega}}, \vec{r}] \quad (0.18)$$

2.в. Сила, действующая на тело в неинерциальной системе отсчета из-за неравномерного вращения:

$$\vec{F}_{neravnom} = -m[\dot{\vec{\omega}}, \vec{r}] = m[\vec{r}, \dot{\vec{\omega}}] \quad (0.19)$$

Поэтому правильная методология, как производить расчеты в гелиоцентрической неинерциальной системе, следующая:

1) Признать действие всех четырёх сил инерции, т.е.

$\vec{a}_{om} = \vec{a}_{abs} + \vec{a}_{InertAll}$, где

$$\vec{a}_{InertAll} = -\dot{\vec{v}}_0 + \omega^2 \vec{r}_\perp + 2[\vec{v}_{om}, \vec{\omega}] - [\dot{\vec{\omega}}, \vec{r}] . \quad (0.20)$$

$\dot{\vec{v}}_0$ нам неизвестна (это ускорение связано с движением всего Млечного Пути во Вселенной), а из [2] следует, что $T = 200$ млн лет, $v_{OrbitalSolar} = 250$ км/с, $R = 26\,000$ световых лет; далее можно записать: $T = \frac{1}{\nu_T}$, откуда $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu_T$. Поэтому можно вычислить, что

$$\omega = \frac{2 \cdot 3,14159}{200 \cdot 10^6 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60^2} \frac{rad}{s} = \frac{2 \cdot 3,14159}{2 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 6^2} \cdot \frac{1}{10^2 \cdot 10^6 \cdot 10^2} \frac{rad}{s}$$

$$= 9,9619 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-10} \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 0,99619 \cdot 10^{-15} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \approx 10^{-15} \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

2) Признать, что есть $\Delta x(t)$, $\Delta y(t)$ и $\Delta z(t)$ – отклонения в траектории по сравнению с расчетами в

галилеевой (инерциальной) системе отсчета.

3) Признать, что $\Delta x(t)$, $\Delta y(t)$ и $\Delta z(t)$ настолько малы даже при больших t , что суммарным ускорением, связанном с неинерциальностью гелиоцентрической системы отсчета, можно пренебречь.

Итак, принципиальный момент моей новой методологии – неинерциальная система отсчета, в которой из-за малости сил инерции можно ими пренебречь, не является инерциальной, или “почти инерциальной”, или “квазиинерциальной” системой отсчета в классической механике.

Так же нужно проводить рассуждения и выкладки и в любой другой системе отсчета, связанной с покоящимся или движущимся относительно Земли телом между поверхностью Земли и самыми высокими слоями ионосферы – начать с признания этой системы неинерциальной, вспомнить о четырёх разных силах инерции, оценить их вклад в изменение траектории – а затем и пренебречь той составляющей сил инерции, что связана с движением Земли с ускорением относительно инерциальной системы отсчета (связанной с телом, которое движется во Вселенной прямолинейно и равномерно).

Стало быть, гелиоцентрическая система – это такая же “плохая” неинерциальная система отсчета, как и геоцентрическая.

Но, тем не менее, все расчеты классической механики в старой, ложной, методологии совпадают с расчетами в новой методологии. Дело в данном случае не в результате, а в правильной логике, которую надлежит использовать в процессе преподавания общей физики вместо ложной логики.

И тут нам на выручку приходит принцип эквивалентности в Общей Теории Относительности

- и геоцентрическая, и гелиоцентрическая системы отсчета являются “хорошими”, согласно Альберту Эйнштейну.

Галилео Галилей же заявлял, что гелиоцентрическая система является “хорошей” инерциальной, а геоцентрическая система отсчета является “плохой” неинерциальной системой отсчета, что является ложью.

Значит, Альберт Эйнштейн полностью и безоговорочно опроверг Галилео Галилея.

Как известно в настоящее время, Общая Теория Относительности Альберта Эйнштейна создает равноправие инерциальных и неинерциальных систем отсчета. Ведь мы все прекрасно знаем, что в классической (Ньютоновской) механике было неравноправие систем отсчета. Инерциальные, или галилеевы системы отсчета – это всегда были “правильные”, “выделенные” или “хорошие” системы отсчета, где не было дополнительных сил инерции, центробежных сил и сил Кориолиса (а также сил, связанных с неравномерностью вращения неинерциальной системы отсчета). Эти силы инерции уже обсуждал академик Александр Юльевич Ишлинский и называл их “эйлеровыми или даламберовыми силами инерции”, которые упомянуты в книге [3].

Таким образом, инерциальные, или галилеевы, системы отсчета движутся друг относительно друга прямолинейно и равномерно, а стоит какой-нибудь другой системе двигаться с ускорением или хотя бы непрямолинейно, она сразу же становится “не-галилеевой”.

В этом-то и заключается рассмотрение относительного движения Земли и Солнца в классической механике – система отсчета, связанная с Землей, полагалась “не-галилеевой” (это верно), а система отсчета, связанная с Солнцем, полагалась галилеевой. Но, строго говоря, система отсчета, связанная с Солнцем, галилеевой не

является! В учебнике астрономии Б. А. Воронцова-Вельяминова для 10-х классов, книге [2], дается следующая оценка движения Солнца вокруг центра Галактики: скорость Солнца – 250 км/с; Солнце делает один оборот за 200 млн лет. Учёные считают, что расстояние от Солнца до центра Галактики составляет 26 тысяч световых лет – такова современная оценка. Движение Солнца вокруг центра Млечного Пути непрямолинейно, значит, система отсчета, связанная с Солнцем, тоже негалилеева.

Теперь перейдем от классической механики с не-галилеевой системой отсчета, связанной с Землей, и с системой отсчета, связанной с Солнцем (как оказалось, тоже не-галилеевой), к релятивистской механике и Общей Теории Относительности. В Общей Теории Относительности из принципа наименьшего действия,

$$\delta (S_m + S_g) = 0, \text{ где} \quad (0.21)$$

$$S_m = \frac{1}{c} \int \Lambda \sqrt{-g} \, d\Omega \quad (\text{здесь } \Lambda = \Lambda(q, \frac{\partial q}{\partial x^i}) - \text{“плотность” функции Лагранжа, т.к. в}$$

плоском пространстве $\int \Lambda \, dV$ есть лагранжиан $L(x^i)$), и

$$S_g = \int G \sqrt{-g} \, d\Omega, \text{ где } G = g^{ik} (\Gamma_{il}^m \Gamma_{km}^l - \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lm}^m). \text{ Если ввести обозначение}$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{-g} T_{ik} = \frac{\partial(\sqrt{-g} \Lambda)}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l} \frac{\partial(\sqrt{-g} \Lambda)}{\partial \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}, \quad (0.22)$$

то уравнения Эйнштейна запишутся в следующем виде [1]:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{8\pi k}{c^4} T_{ik}, \quad (0.23)$$

где $k=6,67408(31) \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{кг}^{-1}$ - гравитационная постоянная.

Эти уравнения Эйнштейн опубликовал 25 ноября 1915 года. Теперь рассмотрим два физических эффекта, которые получили полное согласование с астрономическими наблюдениями:

1) Смещение перигелия Меркурия (аномальная прецессия).

В 1859 года французский ученый Урбен Леверье установил, что наблюдаемая прецессия Меркурия отличается от расчётной с помощью ньютоновской механики (он учел притяжение всех больших тел в Солнечной системе). Итак, по наблюдениям астрономов выходило, что

а) В гелиоцентрической системе прецессия составляет $574 \pm 0,65''$ за столетие;

б) В геоцентрической же системе прецессия составляет $5600''$ за столетие;

В то же время (позже все эти расчеты были опубликованы в [4]) с помощью классической, ньютоновской механики ученые получили, что:

а) В гелиоцентрической системе прецессия составляет $531,63 \pm 0,69''$ за столетие;

б) В геоцентрической же системе прецессия составляет $5557''$ за столетие.

Найдем теперь теоретически смещение перигелия Меркурия. Сначала надо решить уравнения Эйнштейна для Солнца как для невращающегося сферического тела, то есть найти центрально-симметричное решение. Всего есть 16 функций метрики от четырех переменных, $g_{\mu\nu}(x^1, x^2, x^3, x^0) = g_{\mu\nu}(x^i)$, но так как метрический тензор симметричен, то остается 10 независимых функций. После решения уравнений Эйнштейна удобнее ввести обозначение **гравитационный радиус** $r_g = \frac{2kM}{c^2}$ (для

Солнца $r_g = 3 \text{ км}$; для Земли $r_g = 0,9 \text{ см}$), тогда метрика запишется в следующем виде:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr^2 . \quad (0.24)$$

Эта метрика называется **метрикой Шварцшильда** (1916 год), она является частным случаем **метрики Керра** для центрально-симметричного поля гравитирующего **вращающегося вокруг своей оси** тела.

Стоит отметить, что Эйнштейн при расчете перигелия Меркурия ещё не знал точного решения Шварцшильда и решил задачу приближёнными численными методами, его решение было опубликовано 18 ноября 1915 года в [5].

Далее, считать смещение перигелия Меркурия можно, следуя [6], а именно находить траектории частиц из принципа наименьшего действия. Для ненулевых масс вариационная задача составляется следующим образом:

$$\delta S = -mc \delta \int ds = 0 , \text{ где} \quad (0.25)$$

$$ds = \sqrt{g_{\mu\nu}(x^i) dx^\mu dx^\nu} , \quad (0.26)$$

а общий случай (для нулевой массы, то есть фотона в том числе) запишется в виде

$$\delta S = - \frac{1}{2} \delta \int d\tau \left\{ \frac{1}{e(\tau)} g_{\mu\nu}(x^i) \frac{dx^\mu}{d\tau} \cdot \frac{dx^\nu}{d\tau} + e(\tau) \cdot (mc)^2 \right\} . \quad (0.27)$$

Здесь τ - некий параметр вдоль мировой линии частицы и $e(\tau)$ - дополнительная переменная, играющая роль “лагранжевой переменной”. Если же рассматривать τ как временную переменную (которая не совпадает с x^0 , поскольку время в разных системах отсчета течет по разному), то тогда можно выписать **выражение для лагранжиана частицы**:

$$L = -\frac{1}{2} \left\{ e^{-1} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + e \cdot (mc)^2 \right\} . \quad (0.28)$$

К лагранжиану (1.28) применим весь формализм аналитической механики (точка наверху означает дифференцирование по τ). Независимыми переменными в (1.28) являются $e(\tau)$

и $x^\mu(\tau)$.

Но лучше проводить расчеты, как описано в [1], следуя Льву Давидовичу Ландау и Евгению Михайловичу Лифшицу, через уравнение Гамильтона-Якоби (а отклонения луча света вблизи Солнца – с помощью уравнения эйконала), то есть применяя все наработки по лагранжевому и гамильтонову формализму в теоретической механике и обобщая формулы с применением эйконала из геометрической оптики и распространения электромагнитных волн в классической механике и СТО.

Итак, рассмотрим движение частицы в центрально-симметричном гравитационном поле.

Будем, как обычно, использовать сферическую систему координат (r, θ, φ, t) , где $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Пусть движение будет проходить в плоскости $\theta = \frac{\pi}{2}$. Тогда для определения траектории частицы воспользуемся уравнением Гамильтона-Якоби

$$g^{ik} \cdot \frac{\partial S}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial S}{\partial x^j} - m^2 c^2 = 0 . \quad (0.29)$$

Далее будем обозначать массу частицы как m , а массу центрального тела как m' . Если подставить метрику Шварцшильда, то это уравнение запишется в виде:

$$\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 - m^2 c^2 = 0 , \quad (0.30)$$

где $r_g = \frac{2m'k}{c^2}$ – гравитационный радиус центрального тела.

По общим правилам решения уравнения Гамильтона-Якоби ищем S в виде:

$$S = -E_0 t + M\varphi + S_r(r) \quad (0.31)$$

с постоянными энергией E_0 и моментом импульса M . Подставляя этот упрощенный вид действия (который получился из-за того, что координаты t и φ циклически, то есть в уравнение Гамильтона-Якоби входят только $\frac{\partial S}{\partial t}$ и $\frac{\partial S}{\partial \varphi}$, а не сами координаты t и φ),

найдем тогда производную $\frac{d S_r}{d r}$. Интегрируя получившееся выражение, получаем:

$$S_r = \int \left[\frac{E_0^2}{c^2} \left(1 - \frac{r_g}{r} \right)^{-2} - \left(m^2 c^2 + \frac{M^2}{r^2} \right) \left(1 - \frac{r_g}{r} \right)^{-1} \right]^{1/2} dr. \quad (0.32)$$

Зависимость $r = r(t)$ даётся, как известно, уравнением $\frac{\partial S}{\partial E_0} = \text{const}$, откуда

$$ct = \frac{E_0}{mc^2} \int \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r} \right) \left[\left(\frac{E_0}{mc^2} \right)^2 - \left(1 + \frac{M^2}{m^2 c^2 r^2} \right) \left(1 - \frac{r_g}{r} \right) \right]^{1/2}}. \quad (0.33)$$

Траектория же определяется уравнением $\frac{\partial S}{\partial M} = \text{const}$, откуда

$$\varphi = \int \frac{M}{r^2} \left[\frac{E_0^2}{c^2} - \left(m^2 c^2 + \frac{M^2}{r^2} \right) \left(1 - \frac{r_g}{r} \right) \right]^{-1/2} dr. \quad (0.34)$$

Этот интеграл приводится к эллиптическому.

Далее, чтобы получить смещение перигелия Меркурия, будем исходить из выражения для S_r . Заменим переменную интегрирования согласно $r(r - r_g) = (r')^2$, т.е. $r - r_g / 2 \approx r'$, в результате чего под корнем член с M^2 примет вид $M^2 / (r')^2$. Затем опять меняем r' на r . В остальных же членах производим разложение по степеням r_g / r и получаем с требуемой точностью:

$$S_r = \int \left[\left(2E'm + \frac{(E')^2}{c^2} \right) + \frac{1}{r} (2m^2 m'k + 4E'mr_g) - \frac{1}{r^2} \left(M^2 - \frac{3m^2 c^2 r_g^2}{2} \right) \right] dr, \quad (0.35)$$

где была введена нерелятивистская энергия E' ($E' = E_0 - mc^2$). И именно коэффициент при $1/r^2$ приводит к смещению перигелия Меркурия!

Далее, уравнение траектории $\frac{\partial S}{\partial M} = \text{const}$ всегда можно переписать в следующем виде:

$\varphi + \frac{\partial S_r}{\partial M} = \text{const}$, значит, изменение угла φ за время одного оборота планеты по орбите – это

$$\Delta \varphi = - \frac{\partial}{\partial M} \Delta S_r. \quad (0.36)$$

Разлагая S_r по степеням малой поправки в коэффициент при $1/r^2$, получим:

$$\Delta S_r = \Delta S_r^{(0)} - \frac{3m^2 c^2 r_g^2}{4M} \cdot \frac{\partial \Delta S_r^{(0)}}{\partial M}, \quad (0.37)$$

где $\Delta S_r^{(0)}$ соответствует движению по несмещающемуся замкнутому эллипсу. Дифференцируя это соотношение по M и учитывая, что

$$-\frac{\partial}{\partial M} \Delta S_r^{(0)} = \Delta \varphi^{(0)} = 2\pi, \quad (0.38)$$

найдем

$$\Delta \varphi = 2\pi + \frac{3\pi m^2 c^2 r_g^2}{2M^2} = 2\pi + \frac{6\pi k^2 m^2 (m')^2}{c^2 M^2}. \quad (0.39)$$

Второй член и представляет собой искомое угловое перемещение $\delta\varphi$ ньютоновского эллипса за время одного оборота, т. е. смещение перигелия орбиты. Выражая его через длину большой полуоси a и эксцентриситет эллипса e с помощью известной формулы

$$\frac{M^2}{km'm^2} = a(1-e^2), \quad (0.40)$$

получим

$$\delta\varphi = \frac{6\pi k m'}{c^2 a(1-e^2)} \quad (0.41)$$

Численно для Меркурия получаем $42,98''$ в столетие – это $1/130$ ($0,77\%$) от общей скорости прецессии $574 \pm 0,65''$ за столетие.

Для Венеры: $8,62''$ в столетие.

Для Земли: $3,84''$ в столетие.

Для Марса: $1,35''$ в столетие.

Далее рассмотрим путь светового луча в центрально-симметричном гравитационном поле. Этот путь определяется уравнением эйконала

$$g^{ik} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \frac{\partial \psi}{\partial x^k} = 0, \quad (0.42)$$

где эйконал – это волновая фаза в представлении, когда свет проявляет волновые свойства. Это уравнение очень похоже на уравнение Гамильтона-Якоби, а значит, можно взять выражение (1.34), положить в нем $m=0$ и вместо энергии частицы

$$E_0 = -\frac{\partial S}{\partial t} \text{ надо писать частоту света}$$

$$\omega_0 = -\frac{\partial \psi}{\partial t}. \text{ Также перейдем от постоянной } M \text{ к постоянной } \rho = \frac{cM}{\hbar\omega_0}, \text{ и тогда}$$

получим:

$$\varphi = \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}} \quad (0.43)$$

Если пренебречь гравитацией ($r_g \rightarrow 0$), то можно получить, что $r = \rho / \cos \varphi$, то есть прямую, проходящую на расстоянии ρ от начала координат.

Проводя расчеты с учетом гравитации, находим радиальную часть эйконала аналогично (1.32):

$$\psi_r(r) = \frac{\omega_0}{c} \int \sqrt{\frac{r^2}{(r-r_g)^2} - \frac{\rho^2}{r(r-r_g)}} dr \quad (0.44)$$

Опять проводим преобразования с заменой r на r' : $r(r-r_g) = (r')^2$, затем опять меняем

r' на r . Затем раскладываем по степеням $\frac{r_g}{r}$ внутри знака корня. В итоге получим:

$$\psi_r(r) = \frac{\omega_0}{c} \int \sqrt{1 + \frac{2r_g}{r} - \frac{\rho^2}{r^2}} dr \quad (0.45)$$

Теперь раскладываем все подынтегральное выражение по степеням $\frac{r_g}{r}$. Тогда:

$$\psi_r = \psi_r^{(0)} + \frac{r_g \omega_0}{c} \int \frac{dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} = \psi_r^{(0)} + \frac{r_g \omega_0}{c} \text{Arch} \frac{r}{\rho}, \quad (0.46)$$

где $\psi_r^{(0)}$ отвечает классическому прямолинейному лучу.

Полное изменение ψ_r при распространении луча от некоторого очень большого расстояния R до ближайшей к центру точки $r = \rho$ и затем снова на расстояние R есть

$$\Delta \psi_r = \Delta \psi_r^{(0)} + 2 \frac{r_g \omega_0}{c} \text{Arch} \frac{R}{\rho}. \quad (0.47)$$

Далее, по аналогии с решением уравнения Гамильтона-Якоби верно соотношение $\frac{\partial \psi}{\partial M} = \text{const}$,

то есть $\varphi + \frac{\partial \psi_r}{\partial M} = \text{const}$, откуда $\Delta \varphi + \frac{\partial \Delta \psi_r}{\partial M} = 0$, а значит, соответствующее изменение полярного угла φ вдоль луча получается дифференцированием по $M = \frac{\rho \hbar \omega_0}{c}$:

$$\Delta \varphi = - \frac{\partial \Delta \psi_r}{\partial M} = - \frac{\partial \Delta \psi_r^{(0)}}{\partial M} + \frac{2 r_g R}{\rho \sqrt{R^2 - \rho^2}}. \quad (0.48)$$

Наконец, переходя к пределу $R \rightarrow \infty$ и замечая, что прямолинейному лучу соответствует

$\Delta \varphi = \pi$, получим:

$$\Delta \varphi = \pi + \frac{2 r_g}{\rho}. \quad (0.49)$$

Итак, получена итоговая формула для отклонения луча света вблизи гравитирующего тела:

$$\delta \varphi = \frac{2 r_g}{\rho} = \frac{4 k m'}{c^2 \rho}. \quad (0.50)$$

Численно $\delta \varphi = 1,75''$. Это значение было подтверждено наблюдениями астронома Артура Эддингтона. Ещё в марте 1919 года он отплыл из Англии на остров “Принцип” в Западной Африке для наблюдения солнечного затмения. В середине мая 1919 года он установил телескопы. Наконец, 29 мая 1919 года в 2 часа дня началось солнечное затмение. Артуру Эддингтону удалось получить 16 фотографий с экспозицией от 2 до 20 секунд, и несмотря на облачность, на одной из фотографий удалось достичь подтверждения Общей Теории Относительности.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ.

$$\omega = 0,99619 \cdot 10^{-15} \frac{rad}{s} \approx 10^{-15} \frac{rad}{s}$$

Поэтому правильная методология, как производить расчеты в гелиоцентрической неинерциальной системе, следующая:

1) Признать действие всех четырех сил инерции, т.е.

$$\vec{a}_{om} = \vec{a}_{abs} + \vec{a}_{InertAll}, \text{ где}$$

$$\vec{a}_{InertAll} = -\dot{\vec{v}}_0 + \omega^2 \vec{r}_\perp + 2[\vec{v}_{om}, \vec{\omega}] - [\dot{\vec{\omega}}, \vec{r}]. \quad (0.51)$$

$\dot{\vec{v}}_0$ нам неизвестна (это ускорение связано с движением всего Млечного Пути во Вселенной), а из [2] следует, что $T = 200$ млн лет, $v_{OrbitalSolar} = 250$ км/с, $R = 26\,000$ световых лет; далее можно записать: $T = \frac{1}{v_T}$, откуда $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi v_T$. Поэтому можно вычислить, что

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{2 \cdot 3,14159}{200 \cdot 10^6 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60^2} \frac{rad}{s} = \frac{2 \cdot 3,14159}{2 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 6^2} \cdot \frac{1}{10^2 \cdot 10^6 \cdot 10^2} \frac{rad}{s} \\ &= 9,9619 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-10} \frac{rad}{s} = 0,99619 \cdot 10^{-15} \frac{rad}{s} \approx 10^{-15} \frac{rad}{s}. \end{aligned}$$

2) Признать, что есть $\Delta x(t)$, $\Delta y(t)$ и $\Delta z(t)$ – отклонения в траектории по сравнению с расчетами в

галилеевой (инерциальной) системе отсчета.

3) Признать, что $\Delta x(t)$, $\Delta y(t)$ и $\Delta z(t)$ настолько малы даже при больших t , что суммарным ускорением, связанном с неинерциальностью гелиоцентрической системы отсчета, можно пренебречь.

Данная статья может быть полезна для создания новых учебников преподавания физики в ВУЗ'ах, потому что в этой статье было наглядно продемонстрировано следующее – даже если ответ и совпадает с экспериментальными результатами или наблюдательными данными (например, астрономическими), это ещё не значит, что рассуждения верны. Теоретическая физика очень тесно связана с философией – вот ещё одно напрашивающееся утверждение, которое следует из этой статьи. Поэтому было бы замечательно, если бы новая методология была бы востребована и при составлении вузовского курса «История и философия науки».

ЗАКЛЮЧЕНИЯ

Итак, рассмотрением смещения перигелия Меркурия и искривлением света далекой звезды, проходящего мимо края нашего Солнца, и завершается данная работа. В статье удалось сделать главное – показать неинерциальность гелиоцентрической системы отсчета, а именно рассчитать угловую скорость движения Солнца вокруг Млечного Пути (10^{-15} радиан в секунду). Из-за этого при использовании систем отсчёта, в которых малы силы инерции, приходится сначала декларировать отклонения в траекториях, а потом ими пренебрегать. Это позволяет по-прежнему применять весь аппарат классической механики, с той лишь разницей, что не используются ложные термины “почти инерциальная” и “квазиинерциальная” системы отсчета. В Общей же Теории Относительности неинерциальность системы отсчета расчетам и логическим рассуждениям не помеха, все системы отсчета – хорошие, и это является главным плюсом – непротиворечивость рассуждений и логичность выводов этой теории, являющейся самым точным описанием пространственно-временного континуума в макром мире.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Результаты были получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России N 3.9696.2017/8.9 .

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учеб. Пособие. В 10 т. Т. II. Теория поля. – 7-е изд., испр. – М.:Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 512 с.- ISBN 5-02-014420-7 (Т. II).
2. Воронцов-Вельяминов Борис Андреевич. “Астрономия. Учебник для 10 класса”. 121 стр. Издание третье. 1971 г. Издательство “Просвещение” Комитета по печати при Совете Министров РСФСР. Москва.
3. Механика в Московском Университете / под редакцией К. А. Рыбникова.- М.: Изд-во Моск. Университета, 1992. – 168 с. – ISBN 5-211-01979-2. стр. 66-69.
4. Клеменс Г. М. Релятивистские эффекты в движения планет // Ревью оф Модерн Физикс, выпуск 1947 года (Reviews of Modern Physics). – том 19. – стр.361-364. – DOI:10.1103/RevModPhys.19.361 .
5. Эйнштейн А. Объяснение движения перигелия Меркурия в общей теории относительности // Собрание научных трудов в 4 томах.- Т.I.- с. 439-447.
6. Вергелес С.Н. Лекции по теории гравитации: Учебное пособие. – М.:МФТИ, 2001. - 428 с. ISBN 5-7417-0150-7.
7. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Учеб. пособие для вузов. В 5 т. Т.I. Механика. – 6-е изд. стереот. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2017. – 560 с. – ISBN 978-5-9221-1512-4 (Т.I).