ДИНАМИКА КОЛЕБАНИЙ МАНИПУЛЯТОРА НА ОСНОВЕ ЭНЕРГИИ ДЕФОРМАЦИИ

MANIPULATOR OSCILLATION DYNAMICS BASED ON STRAIN ENERGY

ШАМУТДИНОВ А.Х.

SHAMUTDINOV A.KH.

*Омский автобронетанковый
инженерный институт*

*Omsk Automobile Armored Engineering
Institute*

1972id@list.ru

doi: 10.18411/pivsn-03-2019-06

idsp: sciencepub-pivsn-03-2019-06

Аннотация

В работе изложена разработка математической модели динамики колебаний оригинальной части манипулятора на основе использования энергии деформации его приводов, представленных в виде стержней. Установлена связь между расстоянием до центра тяжести подвижной платформы и перемещением приводов. Это позволило найти кинетическую и потенциальную энергии манипулятора и с помощью уравнений Лагранжа II-го рода составить систему дифференциальных уравнений колебаний в матричном виде и решить её.

Ключевые слова: жёсткость стержня; кинетическая и потенциальная энергия; матрица инерции и жёсткости; оригинальная часть манипулятора; теорема Кёнига; энергия деформации.

Abstract

The paper presents the development of a mathematical model of the dynamics of vibrations of the original part of the manipulator based on the use of deformation energy of its drives, presented in the form of rods. The connection between the distance to the center of gravity of the moving platform and the movement of the drives is established. This made it possible to find the kinetic and potential energy of the manipulator and with the help of Lagrange equations of the II kind to create a system of differential equations of oscillations in the matrix form and solve it.

Keywords: rod stiffness; kinetic and potential energy; inertia and stiffness matrix; original part of the manipulator; Koenig theorem; strain energy.

ВВЕДЕНИЕ

Механизмы пространственных манипуляторов с развитой системой приводов широко используют для автоматизации отдельных технологических операций, расширению возможностей технологического оборудования. Совокупное действие приводов позволяет реализовать любое пространственное движение исполнительного органа в пространственной зоне функционирования. Пространственный манипулятор, рассмотренный в [1, 2], представляет собой механизм с независимыми парциальными движениями, включая независимость последовательности их исполнения, с целью упрощения системы управления исполнительным движением. Для разработки математической модели динамической системы рассмотрим оригинальную часть манипулятора (ОЧМ) (рис. 1).

ЦЕЛЬ ИССЛЕДОВАНИЯ

Задача исследования состоит в составлении расчетной схемы ОЧМ и составлении системы дифференциальных уравнений колебаний в матричном виде.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Данный фрагмент манипулятора (рис. 1) состоит из большого количества деталей, связанных между собой различными типами связей. При составлении расчетной схемы динамической системы приняты следующие допущения:

- 1) Зазоры в подвижных соединениях не учитываем.
- 2) Подвижную и неподвижную платформы считаем недеформируемыми, деформируемыми являются три опоры (приводы).
- 3) Начало координат выбрано в геометрическом центре неподвижной платформы.
- 4) Положение центра масс может быть изменено (вытягивание или сокращение приводов). Эти изменения учитываем заданием расстояния до центра тяжести подвижной платформы X, Y, Z .
- 5) При вычислении потенциальной энергии системы не учитываем силы веса, т.е. принимаем потенциальную энергию в положении статического равновесия равной нулю.

При этих допущениях рассматриваются колебания по трем координатным направлениям, и расчетная схема динамической системы ОЧМ может быть представлена в следующем виде (рис. 1). По теореме Кёнига [3], кинетическая энергия подвижной платформы:

$$T = \frac{1}{2} \left[\sum_1^n m_i (\dot{x}^2 + \dot{z}^2) + \sum_1^n J_i \omega_i^2 \right], \quad (1)$$

где $y = 0$, m_i и J_i – массы и моменты инерции.

$$\dot{X}^2 = (Y_{O_1} \cdot \dot{q}_3)^2, \quad \dot{Y}^2 = 0, \quad \dot{Z}^2 = (X_{O_1} \cdot \dot{q}_1 + X_{O_1} \cdot \dot{q}_2 + X_{O_1} \cdot \dot{q}_3)^2,$$

где q_i – перемещения приводов.

Рисунок 1. Динамическая система оригинальной части манипулятора:

1 – Основание; 2 – Наклонная платформа; 3 – Опорно-поворотное устройство; 4 – Рабочий стол; a, b, c – Приводы (гидроцилиндры)

Так как координатные оси выбраны как главные оси инерции, то все центробежные моменты инерции обращаются в нуль и выражение кинетической энергии системы (1) будет:

$$T = \frac{1}{2} \cdot [m \cdot [(Y_{O_1} \cdot \dot{q}_3)^2 + (X_{O_1} \cdot \dot{q}_1 + X_{O_1} \cdot \dot{q}_2 + Y_{O_1} \cdot \dot{q}_3)^2] + J_X \cdot \dot{q}_4^2 + J_Y \cdot \dot{q}_5^2 + J_Z \cdot \dot{q}_6^2]. \quad (2)$$

Потенциальная энергия данного механизма определяется, как энергия деформации трех опор и представлена выражением:

$$\sum_{i=1}^{n=3} \Pi_i = \sum_{i=1}^{n=3} \frac{c_i \cdot \Delta S_i^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot (c_1 \cdot \Delta S_1^2 + c_2 \cdot \Delta S_2^2 + c_3 \cdot \Delta S_3^2), \quad (3)$$

где c_i – жесткость i -го стержня; ΔS_i – деформация i -го стержня, $n=3$ – количество стержней.

Деформация i -го стержня (рис. 2) будет $\Delta S_i = S'_i - S_i$, где S'_i – длина стержня после деформации, S_i – длина стержня до деформации. По правилам аналитической геометрии $S_i^2 = (X'_i - X_i)^2 + (Y'_i - Y_i)^2 + (Z'_i - Z_i)^2$,

$S_i'^2 = (X'_i + \Delta X_i - X_i)^2 + (Y'_i + \Delta Y_i - Y_i)^2 + (Z'_i + \Delta Z_i - Z_i)^2$ или раскрывая скобки, запишем:

$$\begin{aligned} S_i'^2 &= (X'_i - X_i)^2 + 2 \cdot (X'_i - X_i) \cdot \Delta X_i + \Delta X_i^2 + (Y'_i - Y_i)^2 + 2 \cdot (Y'_i - Y_i) \cdot \Delta Y_i + \Delta Y_i^2 + \\ &+ (Z'_i - Z_i)^2 + 2 \cdot (Z'_i - Z_i) \cdot \Delta Z_i + \Delta Z_i^2 = S_i^2 + 2 \cdot (X'_i - X_i) \cdot \Delta X_i + \Delta X_i^2 + \\ &+ 2 \cdot (Y'_i - Y_i) \cdot \Delta Y_i + \Delta Y_i^2 + 2 \cdot (Z'_i - Z_i) \cdot \Delta Z_i + \Delta Z_i^2, \end{aligned} \quad (4)$$

где X_i, Y_i, Z_i – координаты закрепления стержня (шарниров) на неподвижном основании, X'_i, Y'_i, Z'_i – координаты закрепления стержня (шарниров) на подвижной платформе.

В выражении (4), пренебрегая переменными второго порядка малости $\Delta X_i^2, \Delta Y_i^2$ и ΔZ_i^2 , запишем: $S_{li}^2 - S_i^2 = 2 \cdot (X'_i - X_i) \cdot \Delta X_i + 2 \cdot (Y'_i - Y_i) \cdot \Delta Y_i + 2 \cdot (Z'_i - Z_i) \cdot \Delta Z_i$.

Принимая во внимание что $S_{li} = S_i + \Delta S_i$ имеем $S_{li}^2 - S_i^2 = (S_{li} - S_i) \cdot (S_{li} + S_i) = (2S_i + \Delta S_i) \cdot \Delta S_i$,

$$2S_i \cdot \Delta S_i + \Delta S_i^2 = 2 \cdot (X'_i - X_i) \cdot \Delta X_i + 2 \cdot (Y'_i - Y_i) \cdot \Delta Y_i + 2 \cdot (Z'_i - Z_i) \cdot \Delta Z_i \quad (5)$$

Преобразуя выражение (5) и пренебрегая переменными второго порядка малости ΔS_i^2 , получим:

$$\Delta S_i = \frac{(X'_i - X_i) \cdot \Delta X_i}{S_i} + \frac{(Y'_i - Y_i) \cdot \Delta Y_i}{S_i} + \frac{(Z'_i - Z_i) \cdot \Delta Z_i}{S_i} \quad (6)$$

Заменяя в выражении (6) $l_i = \frac{(X'_i - X_i)}{S_i}$, $n_i = \frac{(Y'_i - Y_i)}{S_i}$, $p_i = \frac{(Z'_i - Z_i)}{S_i}$ получим

$$\Delta S_i = l_i \cdot \Delta X_i + n_i \cdot \Delta Y_i + p_i \cdot \Delta Z_i, \quad (7)$$

где l_i, n_i и p_i – направляющие косинусы стержней S_i .

Подставляя выражения (7) в (3) определяется выражение для потенциальной энергии системы.

Рисунок 2. Расчетная схема привода (стержня)

Используя (2) и (3), по классическим уравнениям Лагранжа II-го рода [3] найдём уравнения колебаний системы под действием приложенных усилий в матричном виде:

$$\|a\| \cdot \{\ddot{q}\} + \|c\| \cdot \{q\} = 0, \quad (8)$$

где $\|a\|$ – матрица коэффициентов инерции; $\|c\|$ – матрица коэффициентов жесткости.

Представляя частные решения уравнений (8) в виде гармоничной функции $q_i = A_i \cdot \sin(kt + \beta)$, получим $\ddot{q}_i = -k^2 \cdot A_i \cdot \sin(kt + \beta) = -k^2 \cdot q_i$. Обозначив $\lambda_i = \frac{1}{k_i}$, получим: $\lambda_i \{q\} = \|B\| \cdot \{q\}$. (9)

Раскрывая (9), получим частотное уравнение:

$$\lambda^6 - I_1 \lambda^5 + I_2 \lambda^4 - I_3 \lambda^3 + I_4 \lambda^2 - I_5 \lambda + I_6 = 0, \quad (10)$$

где I_i – миноры, которые получают из общего определителя системы путем вычеркивания i -й строки и j -го столбца. Решая полином (10) путем разложения, можно

найти все значения λ_i , а значит и собственные частоты: $k_i = \sqrt{\frac{1}{\lambda_i}}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЯ

1) Рассмотренная методика на основе энергии деформации позволяет на предварительном, теоретическом, этапе представить математическое описание поведения системы и оценить его динамические характеристики, в частности собственные частоты колебаний и подробно исследовать резонансные явления механизма манипулятора во многих машинах, в частности, транспортных, как системы;

2) Решить вопрос об эксплуатационных возможностях в конкретных условиях, поскольку для различных положений подвижной платформы они различны (изменения центра масс системы), а также оценить возможность работы механизма под действием тех или иных нагрузок с учетом резонансных явлений.

1. Пат. №120599 РФ, МПК В25J1/00. Пространственный механизм / П.Д. Балакин, А. Х. Шамутдинов Заявка №2011153160/02, 26.02.2011. Оpubл. 27.09.2012, Бюл. №27.
2. Пат. №170930 РФ, МПК В25J1/00. Пространственный механизм с шестью степенями свободы / П.Д. Балакин, А. Х. Шамутдинов Заявка №2016115295, 19.05.2016. Оpubл. 15.05.2017, Бюл. №14.
3. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. Ч.2. Динамика. – М.: Высшая школа, 1966. – 411 с.