Методологические основы решения обратной задачи для многокаскадных нечетких реляционных уравнений

Аннотация: Изложены основы теории нечетких реляционных уравнений для решения многокаскадной обратной задачи (задачи нечеткой диагностики). Проведена практическая апробация методики решения в пакете символьной математики.

Ключевые слова: нечеткие реляционные уравнения, нечеткая импликация

Введение

Все проблемы, которые приходится решать и научным работникам теоретикам, и конструкторам и практикам в своей повседневной деятельности, ориентированной на проектирование, синтез, исследование, эксплуатацию, целенаправленное эволюционное развитие, и обеспечение синергетической самоорганизации сложных социально-экономических, биоэкологических и техногенных систем, можно декомпозировать на два класса задач:

- прямые задачи – известно текущее состояние системы, требуется прогнозировать ее положение в фазовом пространстве наблюдаемых координат на перспективу при известном операторе функционирования (эволюции);
- обратные – намечено целевое состояние, требуется синтезировать комплекс управляющих воздействий, обеспечивающих перевод системы из текущего состояния в требуемое.

Очевидно, обратные задачи по определению принципиально сложны и неоднозначны. Более того, в реальных и практически актуальных приложениях

решения должны быть получены с учетом неопределенности, заключающейся в неполноте и противоречивости используемой информация т.е. в нечетких условиях.

Целью настоящего исследования является разработка основных методологических основ решения многоэтапных (многокаскадных) обратных задач в нечеткой постановке (задач нечеткой диагностики).

1 Теоретические основы

Пусть $(M_0 = M), M_1, M_2, \dots, M_s, N$ – непустые конечные четкие множества.

Нечетким реляционным уравнением (правым [1]) называется уравнение вида:

$$\tilde{A} \circ \tilde{X} = \tilde{Y}, \quad (1)$$

где « $\circ$ » – символ композиции (подкомпозиции);

$\tilde{A} = \circ_{i=1}^s \tilde{A}_i(M_{i-1}, M_i)$ – последовательность композиций нечетких соответствий

$$\tilde{A}_i = \iint_{M_{i-1} \times M_i} \frac{\mu_{\tilde{A}_i}(m_{i-1}, m_i)}{(m_{i-1}, m_i)} (\forall m_{(\cdot)} \in M_{(\cdot)}),$$

заданных на $M_{i-1} \times M_{i+1}$ функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{A}_i \circ \tilde{A}_{i+1}}(m_{i-1}, m_{i+1}) = \left[\begin{array}{c} \sup T \\ \inf I \end{array} \left(\mu_{\tilde{A}_i}(m_{i-1}, m_i), \mu_{\tilde{A}_{i+1}}(m_i, m_{i+1}) \right) \right] (\forall m_{(\cdot)} \in M_{(\cdot)}); \quad (2)$$

$$\tilde{X} = \tilde{X}(M_s, N) = \iint_{M_s \times N} \frac{\mu_{\tilde{X}}(m_s, n)}{(m_s, n)} (\forall m_s \in M_s; \forall n \in N) \quad - \quad \text{входное соответствие}$$

(предпосылки);

$$\tilde{Y} = \tilde{Y}(M, N) = \iint_{M \times N} \frac{\mu_{\tilde{Y}}(m, n)}{(m, n)} (\forall m \in M; \forall n \in N) \quad - \quad \text{выходное (закрывающее)}$$

соответствие (заключения) с областью отправления M и областью прибытия N .

Пусть для уравнения вида (1) определены правила композиций и задана последовательность композиций нечетких соответствий $\tilde{A}$.

Прямой задачей называется задача нахождения представления выходного нечеткого соответствия $\tilde{Y}(M, N)$ при известном представлении входного нечеткого соответствия $\tilde{X}(M_s, N)$

Обратной задачей называется задача нахождения представления входного нечеткого соответствия $\tilde{X}(M_s, N)$ при известном представлении выходного нечеткого соответствия $\tilde{Y}(M, N)$.

Очевидно решение прямой задачи тривиально и может быть найдено по формулам (2).

Трудоемкость решения обратной задачи, как правило, высока, более того, множество решений может быть пусто. В этом случае формулируется следующая экстремальная (оптимизационная) задача [2]:

$$\begin{aligned} (D, f): f = \|A \circ X - Y^0\| \rightarrow \min \\ D = \{x \in X : \forall x \in [0, 1]\} \end{aligned} \quad (3)$$

где $Y^0(M, N)$ – наблюдаемое соответствие.

Решение задачи (3) позволяет найти искомое нечеткое соответствие, которое в наивысшей степени отвечает условию минимизации критерия оптимизации – нормы отклонения расчетных величин от наблюдаемых.

2 Практическая апробация

Рассмотрим простейшую двухкаскадную систему вида (1) в матричной форме:

$$A \underset{A}{\circ} B \circ X = Y. \quad (4)$$

Пусть: $A = \begin{pmatrix} 0.92 & 0.77 & 0.56 \\ 0.85 & 0.75 & 0.66 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.73 & 0.44 & 0.84 \\ 0.44 & 0.61 & 0.8 & 0.88 \\ 0.62 & 0.91 & 0.57 & 0.53 \end{pmatrix}$ – заданные нечеткие

соответствия, составляющие композицию;

$Y^0 = \begin{pmatrix} 0.86 & 0.63 \\ 0.91 & 0.68 \end{pmatrix}$ – наблюдаемое соответствие;

$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \\ x_{41} & x_{42} \end{pmatrix}$ – искомое соответствие.

Очевидно, модель (4) на базе импликатора Лукасевича может быть записана в виде:

$$\min\left(\min_{k=1,4}\left(1-\min\left(\min_{l=1,3}(1-a_{il}+b_{lk},1)\right)+x_{kj},1\right)\right)=y_{ij}^0;(j=1,2(i=1,2)).$$

Имеем две системы ($j=1,2$) из двух уравнений ($i=1,2$).

Обе системы имеют решение (в данном простейшем примере). Расчеты выполнялись в среде пакета символьной математики *Wolfram Mathematica* [3], результаты округлены до двух знаков после запятой. Продолжительность поиска решения составляет, примерно 5 секунд.

$$\left\{ \begin{array}{l} 0.60 \leq x_{11} \leq 1 \\ 0.37 \leq x_{12} \leq 1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 0.77 \leq x_{21} \leq 1 \\ 0.54 \leq x_{22} \leq 1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 0.50 < x_{31} \leq 1 \\ 0.27 < x_{32} \leq 1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} x_{41} = 0.78 \\ x_{42} = 0.55 \end{array} \right\}.$$

В данном случае оптимизационная модель (3) сводится к двум экстремальным задачам:

$$\begin{aligned} & \|y_{11}(x_{11}, x_{21}, x_{31}, x_{41}) - y_{11}^0\| + \|y_{21}(x_{11}, x_{21}, x_{31}, x_{41}) - y_{21}^0\| \rightarrow \min \\ & \|y_{12}(x_{12}, x_{22}, x_{32}, x_{42}) - y_{12}^0\| + \|y_{22}(x_{12}, x_{22}, x_{32}, x_{42}) - y_{22}^0\| \rightarrow \min \\ & \forall x \in [0, 1] \end{aligned}$$

Решение методом имитации отжига:

$$X = \begin{pmatrix} 0.68 & 0.81 \\ 0.77 & 0.85 \\ 0.51 & 0.96 \\ 0.78 & 0.55 \end{pmatrix}.$$

Продолжительность поиска решения составляет половину секунды

3 Выводы

Разработанные методологические основы решения обратной задачи для многокаскадных нечетких реляционных уравнений являются унифицированными и могут найти применение во многих предметных областях, начиная с задач технической и медицинской диагностики до проблемы выбора специальных дисциплин студентами с целью получения требуемых навыков для занятия желаемым видом профессиональной деятельности.

Ссылки на источники:

1. Блюмин С. Л., Шуйкова И. А., Сараев П. В., Черпаков И. В. Нечеткая логика: алгебраические основы и приложения. Липецк: ЛЭГИ. 2002. 111с.
2. Osipov G.S. The problem of fuzzy diagnostics as an optimization problem. European Journal of Technical and Natural Sciences, Premier Publishing s.r.o. Vienna. 4. 2018, Pp. 29-32. DOI: [10.29013/EJTNS-18-4-29-31](https://doi.org/10.29013/EJTNS-18-4-29-31)
3. Осипов Г. С., Вашакидзе Н. С., Филиппова Г. В. О решении обратных задач для нечетких соответствий в среде *Wolfram Mathematica* // Постулат. 2018. № 1 (27). С. 42. DOI: [10.18411/Postulat-2018-1](https://doi.org/10.18411/Postulat-2018-1). idSP: <http://sp-identifier.ru/000001postulat-2018-1>

© Осипов Г.С.

Osipov G. S.

Sakhalin State University, Yuzhno-Sakhalinsk

Methodological bases for solving the inverse problem for multi-stage fuzzy relational equations

Annotation: The fundamentals of the theory of fuzzy relational equations for solving a multi-stage inverse problem (problems of fuzzy diagnostics) are outlined. Practical approbation of the method of solving in the package of symbolic mathematics was carried out.

Keywords: fuzzy relational equations, fuzzy implication