КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

Осипов Геннадий Сергеевич

д.т.н., зав кафедрой информатики

Вашакидзе Нателла Семёновна

доцент

ФГБОУ ВО «Сахалинский государственный университет»

Аннотация: приведена методология комплексного исследования систем массового обслуживания смешанного типа, предложено математическое описание задачи моделирования. Формальные зависимости математической модели реализованы и апробированы в системах символьной математики *Wolfram Mathematica* и имитационного моделирования *AnyLogic*.

Ключевые слова: система массового обслуживания, ограничения по длине очереди и по времени ожидания, математическая модель, компьютерное и имитационное моделирование.

COMPUTER MODELING OF QUEUING SYSTEMS OF MIXED TYPE

Osipov

Gennady Sergeyevich

Vashakidze Natella Semyonovna

Abstract: the methodology of complex research of Queuing systems of the mixed type is given, the mathematical description of a problem of modeling is offered. Formal dependencies of the mathematical model are implemented and tested in the systems of symbolic mathematics *Wolfram Mathematica* and simulation modeling *AnyLogic*.

Keywords: Queuing system, queue length and waiting time limits, mathematical model, computer and simulation modeling.

Введение

В настоящее время достижения цифровых технологий находят эффективное применение в различных отраслях науки и практической деятельности человека. Особую значимость, актуальность и весомость использования преимуществ цифровизации обеспечивает возможность в едином комплексе решать проблемы математического, компьютерного и имитационного моделирования сложных систем, что позволяет построить прогноз эволюции исследуемых систем и синтезировать программы оптимального управления их траекториями развития.

Особое место в кластере сложных систем занимают системы, ориентированные на взаимодействие, обслуживание и обеспечение безопасности массовых потоков людей и техники, так называемых, систем массового обслуживания (СМО).

По характеру обслуживания заявок все системы массового обслуживания) делятся на три типа [1, 2]:

1. системы с отказами;
2. системы с ожиданием;
3. системы смешанного типа.

Системы смешанного типа в отличие от СМО с отказами [3] или ожиданием (неограниченной очередью) [4, 5, 6] существуют заявки, которые могут уйти из очереди, если длина очереди или время ожидания превысит некоторую критическую величину.

СМО с ограниченной длиной очереди или длительностью ожидания (пребывания заявок в очереди) занимают особое положение в иерархии семейства систем обслуживания. Связано это с тем, что такие системы используются в предметных областях, связанных с обеспечением безопасности

жизнедеятельности человека, техносферной безопасности и оперативного реагирования на внешние и внутренние изменения.

В подобных системах недопустима задержка ожидания обслуживания заявки в очереди, что может привести к непоправимым последствиям, потере человеческих жизней, снижению качества, ценности и актуальности продукции как материальной, так и информационной.

Целью настоящего исследования является отработка методологии математического, компьютерного и имитационного моделирования стратегически важных комбинированных (смешанного типа) СМО, для которых характерна сложность математической формализации и методов моделирования.

1.1 СМО с ограниченной длиной очереди

1.1.1 Структура и математическая модель

Рассмотрим n -канальную СМО с ожиданием, на которую поступает поток заявок с интенсивностью λ ; интенсивность обслуживания μ (для одного канала); максимально допустимое число мест в очереди m .

Граф состояний многоканальной СМО с ограничением на длину очереди приведен на рисунке 1.

Рис. 1 Граф состояний СМО с ограничением на длину очереди

У каждой стрелки проставлены соответствующие интенсивности потоков событий. Причем по стрелкам справа налево систему переводит поток обслуживаний интенсивность которого равна μ , умноженному на число занятых каналов.

Введем обозначение:

$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ – коэффициент загрузки системы – отношение интенсивности входящего потока заявок к интенсивности их обслуживания в СМО.

В данном случае вероятность простоя каналов обслуживания при отсутствии заявок определится следующим образом:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \left\{ \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} + \frac{\rho^{n+2}}{n^2 \cdot n!} + \dots + \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} \right\} \right)^{-1}.$$

Очевидно, слагаемое в фигурных скобках является убывающей геометрической прогрессией со знаменателем $\frac{\rho}{n}$, тогда

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1} \left(1 - \left(\frac{\rho}{n} \right)^m \right)}{n \cdot n! \left(1 - \frac{\rho}{n} \right)} \right)^{-1}.$$

Выражения для предельных вероятностей состояний системы таковы:

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0 \quad (k = \overline{1, n}); \quad p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} p_0 \quad (r = \overline{1, m}).$$

Соответственно, вероятность отказа в обслуживании (заняты все n каналов и длина очереди m) $P_{\text{отк}} = p_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!} p_0$, относительная пропускная способность системы $Q = P_{\text{обс}} = 1 - P_{\text{отк}}$, абсолютная пропускная способность $A = \lambda Q$, среднее число занятых обслуживанием каналов $n_3 = \frac{A}{\mu}$.

Получим формулу для вычисления среднего числа заявок в системе (длины очереди). Очевидно суммирование будет осуществляться с состояния S_{n+1} , когда в очереди одна заявка до состояния S_{n+m} в котором m заявок стоят в очереди.

$$L_{\text{оч}} = 1 \cdot p_{n+1} + 2 \cdot p_{n+2} + \dots + m \cdot p_{n+m} = p_0 \left[1 \cdot \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} + 2 \cdot \frac{\rho^{n+2}}{n^2 \cdot n!} + \dots + m \cdot \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} \right].$$

Для упрощения преобразований введём обозначение $\varphi = \frac{\rho}{n}$ –

интенсивность нагрузки канала, тогда:

$$L_{\text{оч}} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} p_0 [1 + 2\varphi + 3\varphi^2 + \dots + m\varphi^{m-1}] = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} p_0 \sum_{r=1}^m r \cdot \varphi^{r-1}.$$

Полученное выражение сведём к сумме производных от степенной функции интенсивности нагрузки канала и поменяем местами знаки суммы и производной:

$$\frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} p_0 \sum_{r=1}^m r \cdot \varphi^{r-1} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} p_0 \sum_{r=1}^m \frac{d}{d\varphi} \varphi^r = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} p_0 \frac{d}{d\varphi} \sum_{r=1}^m \varphi^r.$$

Далее выполнив дифференцирование суммы убывающей прогрессии со знаменателем φ , получим:

$$\frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} p_0 \frac{d}{d\varphi} \sum_{r=1}^m \varphi^r = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} p_0 \frac{d}{d\varphi} \frac{\varphi(1-\varphi^m)}{1-\varphi} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} p_0 \frac{1-\varphi^m(m+1-m\varphi)}{(1-\varphi)^2}.$$

Таким образом, окончательно, длина очереди найдется по следующей формуле:

$$L_{\text{оч}} = \frac{\rho^{n+1} p_0 \left[1 - \left(m + 1 - m \frac{\rho}{n} \right) \left(\frac{\rho}{n} \right)^m \right]}{n \cdot n! \left(1 - \frac{\rho}{n} \right)^2}.$$

1.1.2 Компьютерное и имитационное моделирование

Рассмотрим обобщенный пример [7]. Пусть в СМО с $n=2$ каналами поступает входящий поток заявок с интенсивностью $\lambda=0,8$, продолжительность обслуживания заявки $t_{\text{обс}}=2$, предельно допустимая длина очереди $m=3$.

Компьютерное моделирование выполнялось в системе символьной математики *Wolfram Mathematica*. В таблице 1 приведен фрагмент модели, обеспечивающей вычисление параметров функционирования СМО по зависимостям ранее приведенной математической модели.

Таблица 1

Фрагмент компьютерной модели

Показатель	Формула и результат расчета
Вероятность простоя	$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n! (n-\rho)} \left(1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^m\right)}$ 0.156775
Вероятность отказа	$P_{отк} = \frac{\rho^{n+m}}{n! n^m} P_0$ 0.102744
Относительная пропускная способность	$P_{обс} = 1 - P_{отк}$ 0.897256
Абсолютная пропускная способность	$A = P_{обс} \lambda$ 0.717805
Число занятых каналов	$n_3 = \rho P_{обс}$ 1.43561
Длина очереди	$L_{оч} = \frac{\rho^{n+1} \left(1 - (m+1) \left(\frac{\rho}{n}\right)^m + m \left(\frac{\rho}{n}\right)^{m+1}\right)}{(n-\rho)^2 (n-1)!} P_0$ 0.725631
Время пребывания в очереди	$t_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda}$ 0.907039
Число заявок в СМО	$L_{см} = L_{оч} + n_3$ 2.16124
Время пребывания в СМО	$t_{см} = t_{оч} + t_{обс}$ 2.90704

В таблице 2 приведены сравнительные показатели функционирования СМО при различной предельной длине очереди

Таблица 2

Показатели функционирования СМО

Показатель	$m = \infty$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$
p_0	0,111	0,204	0,175	0,157	0,145	0,137
$P_{\text{отк}}$	0	0,209	0,143	0,103	0,076	0,057
Q	1	0,791	0,857	0,897	0,924	0,943
A	0,8	0,633	0,685	0,718	0,739	0,754
n_3	1,6	1,266	1,371	1,436	1,478	1,508
$L_{\text{оч}}$	2,844	0,209	0,465	0,726	0,974	1,205
$t_{\text{оч}}$	3,556	0,261	0,581	0,907	1,218	1,506
$t_{\text{СМО}}$	5,556	2,261	2,581	2,907	3,218	3,506

Очевидно ограничение по длине очереди приводит к увеличению вероятности того, что канал обслуживания свободен (простаивает) и отказа в обслуживании, но позволяет существенно снизить время пребывания заявки в системе.

В качестве инструментального средства для реализации имитационной модели использовалась аналитическая платформы *AnyLogic*, которая поддерживает все известные парадигмы имитационного моделирования, обеспечивает проведение оптимизационных экспериментов и параметрический анализ.

На рисунке 2 представлена принципиальная схема имитационной модели.

Рис. 2 Структура модели в среде *AnyLogic*

По представленной схеме в СМО поступило 16 заявок, одна из них ожидает в очереди, две находятся на обслуживании и 13 покинули систему после обслуживания.

Информация о характеристиках очереди в процессе имитации и их предельных значениях, найденных по математической модели, представлены на рисунке 3.

Рис. 3 Параметры очереди

На рисунке 4 приведены диаграммы изменения количества заявок, находящихся в очереди и на обслуживании

Рис. 4 Продолжительность пребывания в очереди и в СМО

Гистограмма распределения, и средняя продолжительность нахождения заявок в системе обслуживания представлены на рисунке 5.

Рис. 5 Продолжительность пребывания заявок в СМО

Очевидно, параметры функционирования, полученные в процессе имитации близки по величине к своим предельным значениям.

1.2 СМО с ограниченным временем ожидания

1.2.1 Структура и математическая модель

Для формализации описания функционирования систем с ограниченным временем ожидания их также удобно представлять в виде графа состояний, который в простейшем варианте является схемой гибели и размножения (см. рисунок 6.)

Рис. 6 Граф состояний СМО с ограниченным временем ожидания.

Здесь введены следующие обозначения:

$k = \overline{1, n}$ – число занятых каналов;

r – число заявок, находящихся в очереди;

ν – интенсивность уходящего (из очереди, не дождавшись обслуживания) потока заявок;

Для систем с ограниченным временем ожидания предельные вероятности состояний определяются по следующим формулам:

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0 \left(k = \overline{1, n} \right); p_{n+r} = \frac{\rho^n}{n!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\rho^r}{\prod_{i=1}^r (n+i \cdot \beta)} p_0,$$

где $\beta = \frac{\nu}{\mu}$;

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\rho^r}{\prod_{i=1}^r (n+i \cdot \beta)} \right)^{-1}.$$

Исследуем последнюю формулу вероятности того, что система находится в состоянии S_0 (все каналы свободны). Здесь второе слагаемое в скобках есть бесконечный ряд, который не является прогрессией, но его элементы быстро убывают с ростом их номера.

Представим бесконечную сумму в виде двух слагаемых, в первом учитывается конечное число $(q-1)$ ее элементов, а второе (бесконечная сумма) – остаток.

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{\rho^r}{\prod_{i=1}^r (n+i \cdot \beta)} = \sum_{r=1}^{q-1} \frac{\rho^r}{\prod_{i=1}^r (n+i \cdot \beta)} + \sum_{r=q}^{\infty} \frac{\rho^r}{\prod_{i=1}^r (n+i \cdot \beta)}.$$

Оценим остаток R , очевидно

$$R = \sum_{r=q}^{\infty} \frac{\rho^r}{\prod_{i=1}^r (n+i \cdot \beta)} < \sum_{r=q}^{\infty} \frac{\rho^r}{\prod_{i=1}^r i \cdot \beta} = \sum_{r=q}^{\infty} \frac{(\rho/\beta)^r}{r!}.$$

Для суммы справа можно записать оценку сверху:

$$\frac{(\rho/\beta)^q}{q!} \left(1 + \frac{\rho/\beta}{q+1} + \frac{(\rho/\beta)^2}{(q+1)(q+2)} + \dots \right) < \frac{(\rho/\beta)^q}{q!} \left(\underbrace{1 + \frac{\rho/\beta}{1!} + \frac{(\rho/\beta)^2}{2!} + \dots}_{e^{\rho/\beta}} \right).$$

Тогда $R < \frac{(\rho/\beta)^q}{q!} e^{\rho/\beta}$ и, соответственно,

$$\frac{\rho^n}{n!} \sum_{r=q}^{\infty} \frac{(\rho/\beta)^r}{r!} < \frac{\rho^n}{n!} \frac{(\rho/\beta)^q}{q!} e^{\rho/\beta}.$$

Длину очереди можно найти по формуле:

$$L_{\text{оч}} = \frac{\rho - n_3}{\beta},$$

где $n_3 = \sum_{k=1}^{n-1} k p_k + n \left(1 - \sum_{i=0}^{n-1} p_i \right)$ – среднее число занятых каналов.

1.2.2 Компьютерное и имитационное моделирование

Исследуем следующую задачу [8]. СМО состоит из $n=3$ каналов, интенсивность входящего потока составляет $\lambda=4$ заявок, интенсивность обслуживания на каждом из каналов $\mu=2$ заявок. На основании статистических данных известна интенсивность досрочного ухода судов из очереди $\nu=0,15$.

В таблице 3 приведен фрагмент компьютерной модели, реализованной в системе символьной математики *Wolfram Mathematica*, обеспечивающей вычисление параметров функционирования СМО с ограниченным временем пребывания заявок в очереди при $q=15$.

Таблица 3

Фрагмент компьютерной модели

Показатель	Формула и результат расчета
Вероятность простоя каналов	$P_0 = \left(\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \sum_{r=1}^q \frac{\rho^r}{\prod_{i=1}^r (n+i\beta)} \right)^{-1}$ <p>0.116531</p>
Число занятых каналов	$n_3 = \sum_{k=1}^{n-1} k p_k + n \left(1 - \sum_{i=0}^{n-1} p_i \right)$ <p>1.95122</p>
Длина очереди	$L_{\text{оч}} = \frac{\rho - n_3}{\beta}$ <p>0.650399</p>

Продолжительность пребывания в очереди	$t_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda}$ 0.1626
--	--

Исследуем как изменятся основные показатели функционирования СМО при различных значениях q количества элементов, учитываемых в разложении для вероятности простоя системы (см. таблицу 4):

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \sum_{r=1}^q \frac{\rho^r}{\prod_{i=1}^r (n + i \cdot \beta)} \right)^{-1}.$$

Таблица 4

Предельные показатели функционирования СМО

Показатель	q			
	5	10	15	20
p_0	0.119	0.117	0.117	0.117
n_z	1.931	1.950	1.951	1.951
$L_{оч}$	0.915	0.661	0.650	0.650
$t_{оч}$	0.229	0.165	0.163	0.163

На рисунке 7 представлен график изменения величины вероятности простоя каналов от числа членов q , используемых в разложении. Анализ данных, представленных в таблице 4 и на графике 7, позволяет сделать вывод о том, что величина остатка R в бесконечном ряде для вычисления вероятности простоя при $q \geq 15$ остается практически неизменной, что влечет за собой стабилизацию значений и остальных параметров функционирования СМО.

Рис. 7 Зависимость вероятности простоя от количества членов разложения

Имитационное моделирование СМО производилось в системе *AnyLogic*. На рисунке 8 представлена структура модели.

Рис. 8 Структура модели в среде *AnyLogic*

На текущий период моделирования в систему поступило 42 заявки из них 34 покинули СМО после обслуживания, 3 ожидают в очереди, 3 находятся на обслуживании в канале и 2 покинули систему из-за превышения допустимого времени ожидания в очереди.

При $q \geq 15$ расчетные и предельные показатели длины очереди становятся практически одинаковыми (см рисунок 9).

Рис. 9 Длина очереди и отклонение от предельного значения

На рисунке 10 приведена информация о среднем времени, проведенным заявками в очереди.

Рис. 10 Продолжительность пребывания заявок в очереди

Гистограммы распределения и средние значения продолжительности пребывания заявок в очереди и на обслуживании представлены на рисунке 11.

Рис. 11 Показатели времени в очереди и на обслуживании

Выводы

Разработанная математическая модель систем смешанного типа — с ограниченной длиной очереди и ограниченным периодом ожидания в очереди апробирована методами компьютерного и имитационного моделирования. Результаты имитационного моделирования подтверждают сходимость расчетных значений параметров функционирования систем к своим предельным значениям, что подтверждает корректность полученных математических зависимостей.

Список литературы

1. Вентцель Е. С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. М.: Наука, 1980. 208 с.
2. Осипов Г. С. Математическое и имитационное моделирование систем массового обслуживания. М.: ИД Академии Естествознания, 2017. 56 с. Режим доступа: <https://monographies.ru/ru/book/view?id=674> (дата обращения 16.11.2019). DOI: [10.17513/np.234](https://doi.org/10.17513/np.234)
3. Осипов Г. С. Моделирование систем массового обслуживания с отказами // Бюллетень науки и практики. Электрон. журн. 2016. №11 (12). С. 154-165. Режим доступа: <http://www.bulletennauki.com/osipov-g> (дата обращения 15.11.2016). DOI: [10.5281/zenodo.166801](https://doi.org/10.5281/zenodo.166801)
4. Осипов Г. С. Одноканальные системы массового обслуживания с неограниченной очередью в *AnyLogic* // Бюллетень науки и практики. Электрон. журн. 2016. №8 (9). С. 92–95. Режим доступа: <http://www.bulletennauki.com/osipov> (дата обращения 15.08.2016). DOI: [10.5281/zenodo.60245](https://doi.org/10.5281/zenodo.60245)
5. Осипов Г. С. Оптимизация одноканальных систем массового обслуживания с неограниченной очередью // Бюллетень науки и практики. Электрон. журн. 2016. №9 (10). С. 63-71. Режим доступа: <http://www.bulletennauki.com/osipov-gs> (дата обращения: 15.09.2016). DOI: [10.5281/zenodo.154304](https://doi.org/10.5281/zenodo.154304)
6. Осипов Г. С. Исследование систем массового обслуживания с ожиданием в *AnyLogic* // Бюллетень науки и практики. Электрон. журн. 2016. №10 (11). С. 139-151. Режим доступа: <http://www.bulletennauki.com/osipov-g-s> (дата обращения 16.11.2019). DOI: [10.5281/zenodo.161072](https://doi.org/10.5281/zenodo.161072).
7. Осипов Г. С. Системы массового обслуживания с ограниченной длительностью ожидания // Бюллетень науки и практики. Электрон. журн. 2016. № 12 (13). С. 28-36. Режим доступа: <http://www.bulletennauki.com/osipov-g-1> (дата обращения: 15.12.2016). DOI: [10.5281/zenodo.204623](https://doi.org/10.5281/zenodo.204623)

8. Осипов Г.С., Осипова Е.В. Исследование систем массового обслуживания с «нетерпеливыми» заявками. // В сборнике: Материалы конференций ГНИИ «НАЦРАЗВИТИЕ». Октябрь 2016 Сборник избранных статей. Ответственный за выпуск Л.А. Павлов. 2016. С. 41-44.

© Г.С. Осипов, Н.С. Вашакидзе 2019