Бадриев И.Б., Макаров М.В., Мартынова О.П.
*Казанский (Приволжский) федеральный университет
Казань, Россия*

doi: 10.18411/lj2016-9-3-01

idsp 000001: lj2016-18-3-01

Операторная формулировка геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем

Введение.

Трехслойные конструкции нашли широкое применение в качестве разнородного рода панелей и других конструктивных элементов [1–7]. Трехслойную структуру имеют элементы остеклений (триплексы) самолетов и изделий судостроения, в которых материалы внешних слоев имеют упругие характеристики, на несколько порядков превышающие упругие характеристики материала среднего слоя (заполнителя). Данная работа является продолжением [8] и посвящена построению операторной формулировки геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем в виде уравнения в пространстве Соболева. Обобщенные постановки для физически нелинейных и геометрически линейных задач в виде седловых задач, а также методы их решения рассмотрены в [9–14]. Физически нелинейные задачи теории мягких сетчатых оболочек изучены в [15–24].

1. Постановка задачи.

Рассматриваются задачи об определении напряженно-деформированного состояния бесконечно длинной трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем (см. рис. 1).

Рис 1. Трехслойная пластина с трансверсально-мягким заполнителем.

Ширина пластины равна a , толщина заполнителя составляет $2h$, толщины несущих слоев равны $2h_{(k)}$, где k – номер слоя. Исследование процессов деформирования таких элементов прежде всего диктуется необходимостью определения степени их пригодности для дальнейшего использования.

Для описания напряженно-деформированного состояния в несущих слоях используются уравнения модели Кирхгофа-Лява, в заполнителе – уравнения теории упругости, упрощенные в рамках принятой модели трансверсально-мягкого слоя и проинтегрированных по толщине с удовлетворением условий сопряжения слоев по перемещениям [25–27]. В соответствии с [25–27] введем следующие обозначения: $H_{(k)} = h + h_{(k)}$ (здесь и всюду в дальнейшем предполагаем, что $k = 1, 2$), $X_{(k)}^1, X_{(k)}^3$ – компоненты поверхностной нагрузки, приведенной к срединной поверхности k -го слоя, $w^{(k)}$ и $u^{(k)}$ – прогибы и осевые перемещения точек срединной поверхности k -го слоя соответственно, $T_{(k)}^{11}, M_{(k)}^{11}$ – мембранные усилия и внутренние изгибающие моменты в k -м слое соответственно. Края пластины предполагаем закрепленными, так что выполняются условия $u^{(k)}(x) = 0, w^{(k)}(x) = 0, dw^{(k)}/dx = 0$ при $x = 0, x = a$.

Будем рассматривать задачу в геометрически нелинейной постановке, т.е.

$$T_{(k)}^{11} = B_{(k)} \left(du^{(k)} / dx + \frac{1}{2} (dw^{(k)} / dx)^2 \right), \quad M_{(k)}^{11} = D_{(k)} d^2 u^{(k)} / dx^2, \quad \text{где}$$

$$B_{(k)} = 2h_{(k)} E^{(k)} / (1 - \nu_{12}^{(k)})(1 - \nu_{21}^{(k)})$$

– жесткость k -го слоя на растяжение–сжатие, $E^{(k)}$ и $\nu_{12}^{(k)}, \nu_{21}^{(k)}$ – модуль упругости первого рода и коэффициенты

Пуассона материала k -го несущего слоя, $D_{(k)} = B_{(k)} h_{(k)}^2 / 3$ – изгибная жесткость k -го слоя. Пусть $U = (w^{(1)}, w^{(2)}, u^{(1)}, u^{(2)})$ – вектор перемещений точек срединной поверхности k -го слоя, q^1 – касательные напряжения в заполнителе. Для q^1 предполагаем выполненными граничные условия $q^1(0) = q^1(a) = 0$.

В [25–27] для описания напряженно-деформированного состояния трехслойной пластины был построен следующий функционал потенциальной энергии деформаций:

$$L(U, q^1) = P(U, q^1) - A(U, q^1) - A_q(U, q^1), \quad \text{где}$$

$$P(U, q^1) = \frac{1}{2} \int_0^a \left\{ \sum_{k=1}^2 \left[B_{(k)} \left(d u^{(k)} / dx + \frac{1}{2} (d w^{(k)} / dx)^2 \right)^2 + D_{(k)} (d^2 w^{(k)} / dx^2)^2 \right] + c_1 (q^1)^2 + c_2 (d q^1 / dx)^2 + c_3 (w^{(2)} - w^{(1)})^2 \right\} dx$$

есть потенциальная энергия деформации, G_{13} , E_3 – модули поперечного сдвига и обжатия заполнителя, $c_1 = 2h / G_{13}$, $c_2 = h^3 / 3 E_3$, $c_3 = E_3 / (2h)$,

$$A(U, q^1) = \int_0^a \sum_{k=1}^2 [X_{(k)}^1 u^{(k)} + M_{(k)}^1 d w^{(k)} / dx + X_{(k)}^3 w^{(k)}] dx$$

есть работа заданных внешних сил и моментов, $M_{(k)}^1$ – поверхностный момент внешних сил, приведенный к срединной поверхности k -го слоя,

$$A_q(U, q^1) = \int_0^a \left[(u^{(1)} - u^{(2)}) - \sum_{k=1}^2 H_{(k)} d w^{(k)} / dx + c_1 q^1 - c_2 d^2 q^1 / dx^2 \right] q^1 dx$$

есть работа неизвестных контактных касательных напряжений на соответствующих перемещениях. При этом установлено [28], что решение задачи о равновесии трехслойной пластины есть стационарные точки функционала L . Предполагаем, что все постоянные $B_{(k)}$, $D_{(k)}$, c_1 , c_2 , c_3 , G_{13} , E_3 , $E^{(k)}$, $\nu_{12}^{(k)}$, $\nu_{21}^{(k)}$, h , $h_{(k)}$ положительны.

2. Операторная постановка задачи.

Пусть $V_k = W_2^{o(k)}(0, a)$ – пространства Соболева [29] со скалярными произведениями

$$(u, \eta)_k = \int_0^a d^k u / dx^k d^k \eta / dx^k dx, \quad V = V_2 \times V_2 \times V_1 \times V_1.$$

Скалярное произведение в V будем обозначать через $(\cdot, \cdot)_V$. Получим уравнения для стационарных точек функционала L . С этой целью найдем его производные Гато [30, 31]. Перепишем

(с учетом граничных условий для q^1) функционал L в виде $L(U, q^1) = \Phi_0(U) + \Phi_1(U, q^1) - \Phi_2(q^1)$, где

$$\begin{aligned} \Phi_0(U) = & \frac{1}{2} \int_0^a \left\{ \sum_{k=1}^2 \left[B_{(k)} \left(d u^{(k)} / dx + \frac{1}{2} (d w^{(k)} / dx)^2 \right)^2 + D_{(k)} (d^2 w^{(k)} / dx^2)^2 \right] + \right. \\ & \left. + c_3 (w^{(2)} - w^{(1)})^2 \right\} dx - \int_0^a \sum_{k=1}^2 [X_{(k)}^1 u^{(k)} + M_{(k)}^1 d w^{(k)} / dx + X_{(k)}^3 w^{(k)}] dx, \end{aligned}$$

$$\Phi_1(U, q^1) = \int_0^a \left[\sum_{k=1}^2 H_{(k)} d w^{(k)} / dx + (u^{(2)} - u^{(1)}) \right] q^1 dx,$$

$$\Phi_2(q^1) = \frac{1}{2} \int_0^a [c_1 (q^1)^2 + c_2 (d q^1 / dx)^2] dx.$$

В дальнейшем нам потребуется следующая теорема [29, стр.68].

Теорема 1. Пусть $\Omega \subset R^n$ – ограниченная область с регулярной границей Γ и $1 \leq p < \infty$. Тогда $W_p^{(k)}(\Omega) \subset W_r^{(j)}(\Omega)$ для $0 \leq j < k$ и каждого r , удовлетворяющего условию $1/p - (k - j)/n \leq 1/r < 1$; кроме того, для любой функции $u \in W_p^{(k)}(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\|u\|_{j,r} \leq C_{jr}^{kp} \|u\|_{k,p}, \quad (1)$$

где $\|\cdot\|_{k,p}$ – норма в $W_p^{(k)}(\Omega)$, а постоянная C_{jr}^{kp} зависит от Ω, j, k, p, r .

Пусть $Z = (z^{(1)}, z^{(2)}, \eta^{(1)}, \eta^{(2)})$ – произвольный вектор из V , y – из V_1 , t – произвольное положительное число. Имеем

$$\frac{\Phi_0(U + tZ) - \Phi_0(U)}{t} = \int_0^a \sum_{k=1}^2 \frac{B_{(k)}}{2t} \left\{ \left(\frac{du^{(k)}}{dx} + t \frac{d\eta^{(k)}}{dx} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{dw^{(k)}}{dx} + t \frac{dz^{(k)}}{dx} \right)^2 \right\}^2 -$$

$$\begin{aligned}
& - \left[\frac{du^{(k)}}{dx} - \frac{1}{2} \left(\frac{dw^{(k)}}{dx} \right)^2 \right]^2 \} dx + \frac{1}{2} \int_0^a \sum_{k=1}^2 \frac{D_{(k)}}{t} \left\{ \left(\frac{d^2 w^{(k)}}{dx^2} + t \frac{d^2 z^{(k)}}{dx^2} \right)^2 - \right. \\
& \left. - \left(\frac{d^2 w^{(k)}}{dx^2} \right)^2 \right\} dx + \frac{1}{2} \frac{c_3}{t} \int_0^a \left\{ (w^{(2)} - w^{(1)} + t(z^{(2)} - z^{(1)}))^2 - (w^{(2)} - w^{(1)})^2 \right\} dx + \\
& + \int_0^a \sum_{k=1}^2 [X_{(k)}^1 (u^{(k)} + t\eta^{(k)}) + M_{(k)}^1 (dw^{(k)}/dx + t dz^{(k)}/dx) + X_{(k)}^3 (w^{(k)} + t z^{(k)}) - \\
& - X_{(k)}^1 u^{(k)} - M_{(k)}^1 \frac{dw^{(k)}}{dx} - X_{(k)}^3 w^{(k)}] dx = \frac{1}{2} \int_0^a \sum_{k=1}^2 \frac{B_{(k)}}{t} \left\{ \left(\frac{du^{(k)}}{dx} \right)^2 + 2t \frac{du^{(k)}}{dx} \frac{d\eta^{(k)}}{dx} + \right. \\
& + t^2 \left(\frac{d\eta^{(k)}}{dx} \right)^2 - \left(\frac{du^{(k)}}{dx} \right)^2 \} dx + \frac{1}{2} \int_0^a \sum_{k=1}^2 \frac{B_{(k)}}{t} \left\{ \left(\frac{du^{(k)}}{dx} + t \frac{d\eta^{(k)}}{dx} \right) \left(\left(\frac{dw^{(k)}}{dx} \right)^2 + \right. \right. \\
& + 2t \frac{dw^{(k)}}{dx} \frac{dz^{(k)}}{dx} - \left. \left. \frac{du^{(k)}}{dx} \left(\frac{dw^{(k)}}{dx} \right)^2 \right) \right\} dx + \frac{1}{2} \int_0^a \sum_{k=1}^2 \frac{B_{(k)}}{t} \frac{1}{4} \left\{ \left(\frac{dw^{(k)}}{dx} \right)^4 + \right. \\
& + 4t \left(\frac{dw^{(k)}}{dx} \right)^3 \frac{dz^{(k)}}{dx} + 6t^2 \left(\frac{dw^{(k)}}{dx} \right)^2 \left(\frac{dz^{(k)}}{dx} \right)^2 + 4t^3 \frac{dw^{(k)}}{dx} \left(\frac{dz^{(k)}}{dx} \right)^3 + \\
& + t^4 \left(\frac{dz^{(k)}}{dx} \right)^4 - \left. \left(\frac{dw^{(k)}}{dx} \right)^4 \frac{dz^{(k)}}{dx} \right\} dx + \int_0^a \sum_{k=1}^2 D_{(k)} \left\{ \frac{d^2 w^{(k)}}{dx^2} \frac{d^2 z^{(k)}}{dx^2} + \right. \\
& + \frac{t}{2} \int_0^a \sum_{k=1}^2 D_{(k)} \left(\frac{d^2 z^{(k)}}{dx^2} \right)^2 dx + c_3 \int_0^a \left\{ (w^{(2)} - w^{(1)})(z^{(2)} - z^{(1)})^2 + \frac{t}{2} (z^{(2)} - z^{(1)})^2 \right\} dx + \\
& + \int_0^a \sum_{k=1}^2 [X_{(k)}^1 \eta^{(k)} + M_{(k)}^1 \frac{dz^{(k)}}{dx} + X_{(k)}^3 z^{(k)}] dx = \int_0^a \sum_{k=1}^2 B_{(k)} \frac{du^{(k)}}{dx} \frac{d\eta^{(k)}}{dx} dx + \\
& + \frac{t}{2} \int_0^a \sum_{k=1}^2 B_{(k)} \left(\frac{d\eta^{(k)}}{dx} \right)^2 dx + \int_0^a \sum_{k=1}^2 B_{(k)} \left(\frac{du^{(k)}}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw^{(k)}}{dx} \right)^2 \right) \frac{d\eta^{(k)}}{dx} dx + \\
& + \int_0^a \sum_{k=1}^2 B_{(k)} \left(\frac{du^{(k)}}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw^{(k)}}{dx} \right)^2 \right) \frac{dw^{(k)}}{dx} \frac{dz^{(k)}}{dx} dx + \\
& + t \int_0^a \sum_{k=1}^2 B_{(k)} \frac{d\eta^{(k)}}{dx} \frac{dw^{(k)}}{dx} \frac{dz^{(k)}}{dx} dx + \frac{3}{4} t \int_0^a \sum_{k=1}^2 B_{(k)} \left(\frac{dw^{(k)}}{dx} \right)^2 \left(\frac{dz^{(k)}}{dx} \right)^2 dx + \\
& + \frac{1}{2} t^2 \int_0^a \sum_{k=1}^2 B_{(k)} \frac{dw^{(k)}}{dx} \left(\frac{dz^{(k)}}{dx} \right)^3 dx + t^3 \int_0^a \sum_{k=1}^2 B_{(k)} \left(\frac{dz^{(k)}}{dx} \right)^4 dx +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^a \sum_{k=1}^2 D_{(k)} \frac{d^2 w^{(k)}}{dx^2} \frac{d^2 z^{(k)}}{dx^2} dx + \frac{t}{2} \int_0^a \sum_{k=1}^2 D_{(k)} \left(\frac{d^2 z^{(k)}}{dx^2} \right)^4 dx + \\
& + c_3 \int_0^a (w^{(2)} - w^{(1)})(z^{(2)} - z^{(1)}) dx + c_3 \frac{t}{2} \int_0^a (z^{(2)} - z^{(1)})^2 dx + \\
& + \int_0^a \sum_{k=1}^2 [X_{(k)}^1 \eta^{(k)} + M_{(k)}^1 \frac{dz^{(k)}}{dx} + X_{(k)}^3 z^{(k)}] dx \\
& t \int_0^a \left(\frac{d\eta^{(k)}}{dx} \right)^2 dx = t \|\eta^{(k)}\|_{1,2}^2 \rightarrow 0
\end{aligned}$$

Используя теперь теорему 1, находим, что при $t \rightarrow 0$. Применяя обобщенное неравенства Гельдера с показателями 2, 4, 4

$$\left| t \int_0^a \frac{d\eta^{(k)}}{dx} \frac{dw^{(k)}}{dx} \frac{dz^{(k)}}{dx} dx \right| \leq t \|\eta^{(k)}\|_{1,2} \|w^{(k)}\|_{1,4} \|z^{(k)}\|_{1,4}$$

(см., напр., [32]), получаем

Из неравенства (1) вытекает, что

$$\|w^{(k)}\|_{1,4} \leq C_{14}^{22} \|w^{(k)}\|_{2,2}, \quad (2)$$

$$\text{поэтому} \quad \left| t \int_0^a \frac{d\eta^{(k)}}{dx} \frac{dw^{(k)}}{dx} \frac{dz^{(k)}}{dx} dx \right| \leq t (C_{14}^{22})^2 \|\eta^{(k)}\|_{1,2} \|w^{(k)}\|_{2,2} \|z^{(k)}\|_{2,2} \rightarrow 0$$

при $t \rightarrow 0$. Снова в силу (2), имеем

$$t \int_0^a \left(\frac{dw^{(k)}}{dx} \right)^2 \left(\frac{dz^{(k)}}{dx} \right)^2 dx \leq t \|w^{(k)}\|_{1,4}^2 \|z^{(k)}\|_{1,4}^2 \leq t (C_{14}^{22})^4 \|w^{(k)}\|_{2,2}^2 \|z^{(k)}\|_{2,2}^2 \rightarrow 0$$

при $t \rightarrow 0$. Из неравенства Гельдера с показателями 4 и 4/3 и неравенства (2)

$$t^2 \left| \int_0^a \frac{dw^{(k)}}{dx} \left(\frac{dz^{(k)}}{dx} \right)^3 dx \right| \leq$$

вытекает, что

$$\leq t^2 \|w^{(k)}\|_{1,4} \|z^{(k)}\|_{1,4}^3 \leq t^2 (C_{14}^{22})^4 \|w^{(k)}\|_{2,2} \|z^{(k)}\|_{2,2}^3 \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow 0. \text{Далее,}$$

$$t^3 \int_0^a \left(\frac{dz^{(k)}}{dx} \right)^4 dx = t^3 \|z^{(k)}\|_{1,4}^4 \leq t^3 (C_{14}^{22})^4 \|z^{(k)}\|_{2,2}^4 \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow 0, \quad t \int_0^a \left(\frac{d^2 z^{(k)}}{dx^2} \right)^2 dx =$$

$$= t \|z^{(k)}\|_{2,2}^4 \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow 0. \text{ И так, } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi_0(U + tZ) - \Phi_0(U)}{t} = (\Phi_0'(U), Z)_V =$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^a \sum_{k=1}^2 B_{(k)} \frac{du^{(k)}}{dx} \frac{d\eta^{(k)}}{dx} dx + \int_0^a \sum_{k=1}^2 B_{(k)} \left(\frac{du^{(k)}}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw^{(k)}}{dx} \right)^2 \right) \frac{d\eta^{(k)}}{dx} dx + \\ &+ \int_0^a \sum_{k=1}^2 B_{(k)} \left(\frac{du^{(k)}}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw^{(k)}}{dx} \right)^2 \right) \frac{dw^{(k)}}{dx} \frac{dz^{(k)}}{dx} dx + \int_0^a \sum_{k=1}^2 D_{(k)} \frac{d^2 w^{(k)}}{dx^2} \frac{d^2 z^{(k)}}{dx^2} dx + \\ &+ c_3 \int_0^a (w^{(2)} - w^{(1)})(z^{(2)} - z^{(1)}) dx + \int_0^a \sum_{k=1}^2 [X_{(k)}^1 \eta^{(k)} + M_{(k)}^1 \frac{dz^{(k)}}{dx} + X_{(k)}^3 z^{(k)}] dx \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} &\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi_1(U + tZ, q^1) - \Phi_1(U, q^1)}{t} = (\Phi_{1,U}'(U, q^1), Z)_V = \\ &= \frac{1}{t} \int_0^a \left\{ \sum_{k=1}^2 H_{(k)} \left(\frac{dw^{(k)}}{dx} + t \frac{dz^{(k)}}{dx} \right) + ((u^{(2)} - u^{(1)}) + t(\eta^{(2)} - \eta^{(1)})) - \sum_{k=1}^2 H_{(k)} \frac{dw^{(k)}}{dx} - \right. \\ &\left. - (u^{(2)} - u^{(1)}) \right\} q^1 dx = \int_0^a \left\{ \sum_{k=1}^2 H_{(k)} \frac{dz^{(k)}}{dx} + (\eta^{(2)} - \eta^{(1)}) \right\} q^1 dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi_1(U, q^1 + ty) - \Phi_1(U, q^1)}{t} = (\Phi_{1,q}'(U, q^1), y)_1 = \frac{1}{t} \int_0^a \left\{ \sum_{k=1}^2 H_{(k)} \frac{dw^{(k)}}{dx} + \right. \\ &\left. + (u^{(2)} - u^{(1)}) \right\} (q^1 + ty - q^1) dx = \int_0^a \left\{ \sum_{k=1}^2 H_{(k)} \frac{dw^{(k)}}{dx} + (u^{(2)} - u^{(1)}) \right\} y dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\Phi_2(q^1 + ty) - \Phi_2(q^1)}{t} = \frac{1}{2t} \int_0^a (c_1(q^1 + ty)^2 - c_1(q^1)^2 + c_2(dq^1/dx + t dy/dx)^2 - \\ &- c_2(dq^1/dx)^2) dx = \int_0^a (c_1 q^1 y + c_2 dq^1/dx dy/dx + \frac{t}{2} \int_0^a (c_1 y^2 + c_2 (dy/dx)^2) dx \end{aligned}$$

Снова применяя неравенство (1), имеем $\|y\|_{0,2} \leq C_{02}^{12} \|y\|_{1,2}$, а значит,

$$t \int_0^a (c_1 y^2 + c_2 (dy/dx)^2) dx = c_1 t \|y\|_{0,2}^2 + c_2 t \|y\|_{1,2}^2 \leq t \left((C_{02}^{12})^2 c_1 + c_2 \right) \|y\|_{1,2}^2 \rightarrow 0$$

, т.е.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi_2(q^1 + ty) - \Phi_2(q^1)}{t} = (\Phi_2'(q^1), y)_1 = \int_0^a (c_1 q^1 y + c_2 dq^1/dx dy/dx) dx$$

Таким образом, стационарные точки функционала L есть решения вариационных уравнений (интегральных тождеств)

$$\begin{aligned} & \int_0^a \sum_{k=1}^2 B_{(k)} \frac{du^{(k)}}{dx} \frac{d\eta^{(k)}}{dx} dx + \int_0^a \sum_{k=1}^2 B_{(k)} \left(\frac{du^{(k)}}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw^{(k)}}{dx} \right)^2 \right) \frac{d\eta^{(k)}}{dx} dx + \\ & + \int_0^a \sum_{k=1}^2 B_{(k)} \left(\frac{du^{(k)}}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw^{(k)}}{dx} \right)^2 \right) \frac{dw^{(k)}}{dx} \frac{dz^{(k)}}{dx} dx + \int_0^a \sum_{k=1}^2 D_{(k)} \frac{d^2 w^{(k)}}{dx^2} \frac{d^2 z^{(k)}}{dx^2} dx + \\ & + c_3 \int_0^a (w^{(2)} - w^{(1)})(z^{(2)} - z^{(1)}) dx + \int_0^a \sum_{k=1}^2 [X_{(k)}^1 \eta^{(k)} + M_{(k)}^1 \frac{dz^{(k)}}{dx} + X_{(k)}^3 z^{(k)}] dx + \\ & + \int_0^a \left\{ \sum_{k=1}^2 H_{(k)} \frac{dz^{(k)}}{dx} + (\eta^{(2)} - \eta^{(1)}) \right\} q^1 dx = 0 \quad \forall Z \in V, \\ & \int_0^a \left\{ \sum_{k=1}^2 H_{(k)} \frac{dw^{(k)}}{dx} + (u^{(2)} - u^{(1)}) + c_1 q^1 y + c_2 dq^1/dx dy/dx \right\} y dx = 0 \quad \forall y \in V_1 \end{aligned}$$

Отметим, что данные интегральные тождества совпадают с приведенными в работах [33, 34].

Суммируя интегральные тождества, получим вариационное уравнение

$$b((U, q^1), (Z, y)) = ((f_1, 0), (Z, y))_{V \times V_1} \quad \forall (Z, y) \in W = V \times V_1. \quad (3)$$

Легко проверить, что форма $b(\cdot, \cdot)$, заданная на $W \times W$ линейна и ограничена по второму аргументу, а значит, порождает оператор $A: W \times W \rightarrow W \times W$, правая часть (3) порождает элемент $F \in W$. Таким образом (3) может быть записана в виде операторного уравнения $A(U, q^1) = F$.

3. Заключение.

Проведено построение операторной постановки геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем. В дальнейшем будет исследована ее разрешимость полученного операторного уравнения, разработаны и исследованы приближенные методы его решения. При этом будут использованы разработанные в [35–46] подходы.

Публикация осуществлена при поддержке РНФ (проект № 16-11-10299.)

Литература:

1. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.
2. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. – М: Машиностроение, 1988. – 272 с.
3. Паймушин В.Н., Шалашилин В.И. О геометрически нелинейных уравнениях теории безмоментных оболочек с приложениями к задачам неклассических формах потери устойчивости цилиндра // Прикладная математика и механика. – 2006. – Т. 70, № 1. – С. 100–110.
4. Паймушин В.Н., Холмогоров С.А., Бадриев И.Б., Макаров М.В. Геометрически и физически нелинейная задача о трехточечном изгибе композитных тест-образцов // В книге: Материалы XXII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет). – Москва: ООО "ТРИП", 2016. – С. 197–202.
5. Paimushin V.N., Polyakova N.V. The consistent equations of the theory of plane curvilinear rods for finite displacements and linearized problems of stability // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2009. – V. 73, № 2. – С. 220–236.
6. Paimushin V.N., Firsov V.A., Gyunal I., Egorov A.G. Theoretical-experimental method for determining the parameters of damping based on the study of damped flexural vibrations of test specimens. 1. Experimental basis // Mechanics of Composite Materials. – 2014. – V. 50, № 2. – P. 127-136.
7. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н. О взаимодействии композитной пластины, имеющей вибропоглощающее покрытие, с падающей звуковой волной // Известия высших учебных

заведений. Математика. – 2015. – № 3. – С. 75–82.

8. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Мартынова О.П. Постановка геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // Тенденции науки и образования в современном мире. – 2016. – № 16-1. – С. 5–11.
9. Бадриев И.Б., Гарипова Г.З., Макаров М.В., Паймушин В.Н., Хабибуллин Р.Ф. О решении физически нелинейных задач о равновесии трехслойных пластин с трансверсально-мягким заполнителем // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2015. – Т. 157, № 1. – С. 15–24.
10. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Гарипова Г.З., Макаров М.В. О разрешимости нелинейной задачи о равновесии трехслойной пластины // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2015. – Т. 20, № 5. – С. 1034–1036.
11. Badriev I.B., Banderov V.V., Garipova G.Z., Makarov M.V., Shagidullin R.R. On the solvability of geometrically nonlinear problem of sandwich plate theory // Applied Mathematical Sciences. – 2015. – V. 9, № 82. – P. 4095-4102.
12. Бадриев И.Б., Гарипова Г.З., Макаров М.В. Приближенные методы решения задачи об изгибе трехслойной пластины с идеально упруго-пластическим заполнителем // В книге: Материалы XXII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет). – Москва: ООО "ТРИП", 2016. – С. 31–33.
13. Бадриев И.Б., Гарипова Г.З., Макаров М.В. Сеточные аппроксимации физически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // В сборнике: Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна - 2016. Материалы международной конференции. – Воронеж: Издательско-полиграфический центр «Научная

книга», 2016. – С. 70–72.

14. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Гарипова Г.З. О решении физически нелинейных задач о равновесии трехслойных пластин // В книге: Теория управления и математическое моделирование Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова. Удмуртский государственный университет, – Ижевск: Изд-во "Удмуртский университет", 2015. – С. 235–237.
15. Badriev I.B., Banderov V.V. Iterative methods for solving variational inequalities of the theory of soft shells // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2014. – V. 35, № 4. – P. 371-383.
16. Badriev I. Banderov V. Numerical method for solving variation problems in mathematical physics // Applied Mechanics and Materials. – 2014. – V. 668-669. – P. 1094–1097.
17. Badriev I.B., Banderov V.V., Zadvornov O.A. On the equilibrium problem of a soft network shell in the presence of several point loads // Applied Mechanics and Materials. – 2013. – V. 392. – P. 188–190.
18. Badriev I.B., Shagidullin R.R. A study of the convergence of a recursive process for solving a stationary problem of the theory of soft shells // Journal of Mathematical Sciences. – 1995. – V. 73, № 5. – P. 519–525.
19. Бадриев И.Б. Решение вариационных задач нелинейных процессов механики сплошной среды // В книге: Теория управления и математическое моделирование Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова. Удмуртский государственный университет. – Ижевск: Изд-во "Удмуртский университет", 2015. – С. 234–235.
20. Бадриев И.Б. О решении вариационных неравенств второго рода // В сборнике: Сеточные методы для краевых задач и приложения Материалы

Девятой Всероссийской конференции. – Казань: Отечество, 2012. – С. 32–35.

21. Бадриев И.Б., Бандеров В.В. Численное моделирование деформирования биокomпозитов // В книге: Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред Материалы XXI международного симпозиума имени А.Г. Горшкова. Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет). – Москва: ООО "ТРП", 2015. – С. 7–9.
22. Бадриев И.Б., Бандеров В.В. Итерационные методы решения вариационных неравенств теории мягких оболочек // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2013. – Т. 155, № 2. – С. 18–32.
23. Бадриев И.Б., Задворнов О.А. Исследование разрешимости стационарных задач для сетчатых оболочек // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1992. – № 11. – С. 3–7.
24. Бадриев И.Б., Задворнов О.А. Исследование разрешимости осесимметричной задачи об определении положения равновесия мягкой оболочки вращения // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2005. – № 1. – С. 25–30.
25. Паймушин В.Н., Бобров С.Н. Уточненная геометрически нелинейная теория трехслойных оболочек с трансверсально-мягким наполнителем средней толщины для исследования смешанных форм потери устойчивости // Механика композитных материалов. – 2000. – Т. 36, № 1. – С. 95.
26. Паймушин В.Н. К вариационным методам решения нелинейных пространственных задач сопряжения деформируемых тел // Доклады Академии наук. – 1983. – Т. 273, № 5. – С. 1083.
27. Паймушин В.Н. Нелинейная теория среднего изгиба трехслойных оболочек с дефектами в виде участков непрочлея // Прикладная механика.

– 1987. – Т. 23, № 11. – С.32.

28. Паймушин В.Н. Обобщенный вариационный принцип Рейсснера в нелинейной механике пространственных составных тел с приложениями к теории многослойных оболочек // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 1987. – № 2. – С. 171.
29. Adams R.A. Sobolev Spaces. – New York, San Francisco, London: Academic Press, 1975. – 286 p.
30. Вайнберг М.М. Вариационные методы исследования нелинейных операторов. – М: Гостехиздат, 1956. – 344с.
31. Вайнберг М.М. Вариационный метод и метод монотонных операторов. – М: Наука, 1972. – 416с.
32. Гаевский Х., Греггер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М: Мир, 1978. – 336 с.
33. Badriev I.B., Banderov V.V., Makarov M.V., Paimushin V.N. Determination of stress-strain state of geometrically nonlinear sandwich plate // Applied Mathematical Sciences. – 2015. – V. 9, № 78. – P. 3887–3895.
34. Бадриев И.Б., Желтухин В.С., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Численное решение задачи о равновесии трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем в геометрически нелинейной постановке // Вестник Казанского технологического университета. – 2014. – Т.17, № 23. – С. 393–396.
35. Бадриев И.Б., Карчевский М.М. Применение метода двойственности к решению нелинейных задач теории фильтрации с предельным градиентом // Дифференциальные уравнения. – 1982. – Т. 18, №7. – С. 1133–1144.
36. Badriev I.B. On the solving of variational inequalities of stationary problems of two-phase flow in porous media // Applied Mechanics and Materials. - 2013. - V. 392. - P. 183-187.
1. 35. Badriev I.B., Karchevskii M.M. Convergence of an iterative process in a Banach space // Journal of Mathematical Sciences. – 1994. – V. 71, № 6. – P.

2727–2735.

37. Бадриев И.Б., Нечаева Л.А. Математическое моделирование установившейся фильтрации с многозначным законом // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2013. – № 3. – С. 35–62.
38. Бадриев И.Б., Бандеров В.В. Итерационные методы решения вариационных неравенств теории мягких оболочек // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2013. – Т. 155, кн.2. – С. 18–32.
39. Желтухин В.С., Чебакова В.Ю., Шнейдер М.Н. Моделирование ВЧЕ-разряда при больших межэлектродных расстояниях // В сборнике: Сеточные методы для краевых задач и приложения. Материалы Девятой Всероссийской конференции. – Казань: Отечество, 2012. – С. 183–186.
40. Zheltukhin V.S., Solov'ev S.I., Solov'ev P.S., Chebakova V.Y. Computation of the minimum eigenvalue for a nonlinear Sturm-Liouville problem // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2014. – V. 35, № 4. – P. 416–426.
41. Абдуллин И.Ш., Желтухин В.С., Чебакова В.Ю., Шнейдер М.Н. Тематическая модель ВЧЕ-разряда в аргоне при больших межэлектродных расстояниях // Вестник Казанского технологического университета. – 2013. – Т. 16, № 22. – С. 334–338.
42. Бикчантаев Д.Х., Желтухин В.С., Чебакова В.Ю. Численное исследование процесса взаимодействия высокочастотного емкостного разряда с материалами // В книге: Теория управления и математическое моделирование. Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова. Удмуртский государственный университет. – Ижевск: Изд-во "Удмуртский университет", 2015. – С. 241–242.
43. Желтухин В.С., Соловьёв С.И., Соловьёв П.С., Чебакова В.Ю. Вычисление

минимального собственного значения нелинейной задачи Штурма – Лиувилля // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2013. – Т. 155, № 3. – С. 91–104.

44. Чебакова В.Ю. Численное моделирование высокочастотного емкостного разряда // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2015. – Т. 157. № 2. – С. 126–140.
45. Бадриев И.Б., Ляшко А.Д., Панкратова О.В. Исследование сходимости итерационных методов решения нелинейных задач теории фильтрации // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1998. – № 11. – С. 8–13.
46. Бадриев И.Б. Разностные схемы для нелинейных задач фильтрации с разрывным законом // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1983. – № 5. – С. 3.