Макаров М.В.

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Казанский национальный исследовательский технический
университет им. А.Н. Туполева-КАИ
Казань, Россия*

doi: 10.18411/lj2016-8-2-08

idsp 000001: lj2016-17-2-08

Численное исследование геометрически нелинейной задачи о поперечном изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем

Введение.

Трехслойные конструкции нашли широкое применение в качестве несущих и управляющих поверхностей летательных аппаратов, обтекателей, теплозащитных и силовых экранов, разного рода панелей и других конструктивных элементов [1–6].

Рис. 1. Трехслойная пластина с трансверсально-мягким заполнителем (1 – подкрепляющая несущие слои диафрагма; 2 – жесткий опорный элемент; 3 – заполнитель; 4 – внешние несущие слои)

В настоящей работе изучается геометрически линейная и физически нелинейная задача о поперечном изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем (см. рис. 1а), схема нагружения и закрепления которой показана на рис. 1б. Для приближенного решения задачи построена конечно-разностная аппроксимация задачи. Численное решение осуществляется с помощью двухслойного итерационного метода с предобуславливателем, являющимся линейной частью оператора построенной разностной схемы. На основе разработанного комплекса программ в среде

Matlab проведены численные эксперименты для модельной задачи. Приведены результаты численных экспериментов. Проведен анализ полученных результатов. Ранее подобная задача изучалась в случае жесткого закрепления несущих слоев при отсутствии диафрагм [6-8]. В работах [9-16] изучены задачи определения напряженно-деформированного состояния трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем в геометрически линейной и физически нелинейной постановке. Отметим, что в [17–25] построены обобщенные постановки задач теории мягких сетчатых оболочек, так же, как и методы их решения.

1. Постановка задачи.

Рассматриваются задачи об определении напряженно-деформированного состояния бесконечно длинной трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем. Для описания напряженно-деформированного состояния в несущих слоях используются уравнения модели Кирхгофа-Лява, в заполнителе – уравнения теории упругости, упрощенные в рамках принятой модели трансверсально-мягкого слоя и проинтегрированных по толщине с удовлетворением условий сопряжения слоев по перемещениям [26–28]. Ширина пластины равна a , толщина заполнителя составляет $2t$, толщины несущих слоев равны $2t^{(k)}$, где k – номер слоя. Исследование процессов деформирования таких элементов диктуется прежде всего необходимостью определения степени их пригодности для дальнейшего использования. В соответствии с [26–28] введем следующие обозначения: $H_{(k)} = t + t^{(k)}$ (здесь и всюду в дальнейшем предполагаем, что $k = 1, 2$), $X_{(k)}^1, X_{(k)}^3$ – компоненты поверхностной нагрузки, приведенной к срединной поверхности k -го слоя, $w^{(k)}$ и $u^{(k)}$ – прогибы и осевые перемещения точек срединной поверхности k -го слоя соответственно, q^1 – касательные напряжения в заполнителе, $T_{(k)}^{11}, M_{(k)}^{11}$ – мембранные усилия и внутренние изгибающие моменты в k -м слое соответственно, $c_3 = E_3 / (2h)$, $M_{(k)}^1$ – компоненты вектора поверхностных моментов k -го слоя.. Будем рассматривать задачу в геометрически нелинейной постановке:

$$T_{(k)}^{11} = B_{(k)} \left(d u^{(k)} / dx + \frac{1}{2} (d w^{(k)} / dx)^2 \right), \quad M_{(k)}^{11} = D_{(k)} d^2 u^{(k)} / dx^2, \quad \text{где}$$

$B_{(k)} = 2h_{(k)} E^{(k)} / (1 - \nu_{12}^{(k)})(1 - \nu_{21}^{(k)})$ – жесткость k -го слоя на растяжение–сжатие,

$E^{(k)}$ и $\nu_{12}^{(k)}, \nu_{21}^{(k)}$ – модуль упругости первого рода и коэффициенты Пуассона

материала k -го несущего слоя, $D_{(k)} = B_{(k)} h_{(k)}^2 / 3$ – изгибная жесткость k -го

слоя, $S_{(k)}^1 = Q_{(k)}^1 + H_{(k)} q^1$ – обобщенные перерезывающие силы в k -м слое,

$Q_{(k)}^1 = dM_{(k)}^{11} / dx + T_{(k)}^{11} dw^{(k)} / dx + M_{(k)}^1$ – перерезывающие силы в k -м несущем

слое. Задача о равновесии трехслойной пластины с трансверсально-мягким

заполнителем в одномерной геометрически нелинейной постановке описывается

следующей системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dT_{(k)}^{11}}{dx} + X_{(k)}^1 + (3 - 2k)q^1 = 0, & 0 < x < a, \\ \frac{dS_{(k)}^1}{dx} + c_3(3 - 2k)(w^{(2)} - w^{(1)}) + X_{(k)}^3 = 0, & 0 < x < a, \\ u^{(1)} - u^{(2)} - H_{(1)} \frac{dw^{(1)}}{dx} - H_{(2)} \frac{dw^{(2)}}{dx} + \frac{2t}{G_{13}} q^1 - \frac{2t^3}{3E_3} \frac{d^2 q^1}{dx^2} = 0, & 0 < x < a, \end{cases} \quad (1)$$

Предполагаем, что в правом торцевом сечении края несущих слоев жестко защемлены и отсутствует адгезионное соединение заполнителя с опорным элементом, на левом торцевом сечении края несущих слоев пластины шарнирно оперты на абсолютно жесткие в поперечном направлении диафрагмы, склеенной с торцевым сечением заполнителя. При таких условиях закрепления уравнения (1) дополняются граничными условиями

$$T_{(k)}^{11}(0) = 0, \quad w^{(k)}(0) = d^2 w^{(k)}(0) / dx^2 = 0, \quad k = 1, 2, \quad dq^1(0) / dx = 0, \quad (2)$$

$$u^{(k)}(a) = 0, \quad w^{(k)}(a) = dw^{(k)}(a) / dx = 0, \quad k = 1, 2, \quad q^1(a) = 0. \quad (3)$$

Пусть $U = (w^{(1)}, w^{(2)}, u^{(1)}, w^{(2)})$ – вектор перемещений точек срединной поверхности k -го слоя. Обобщенная постановка задачи (1)–(3) формулируется в

виде интегральных тождеств относительно функций U и q^1 из пространств Соболева.

2. Приближенный метод решения и численные эксперименты.

Приближенный метод решения рассматриваемой задачи основан на предварительном построении ее конечно-разностной аппроксимации с последующим применением для ее реализации двухслойного итерационного процесса. В операторной форме разностная схема имеет вид $(A_1 + A_2)U = F$, где A_1 – линейный оператор, A_2 – нелинейный [6, 7]. Двухслойный итерационный процесс с опусканием нелинейности на нижний слой ([6, 7, 29–34], см. также [35–40]) записывается в виде $A_1(U^{(n+1)} - U^{(n)})/\tau + (A_1 + A_2)U^{(n)} = F$, где $U^{(0)}$ – заданное начальное приближение, $\tau > 0$ – итерационный параметр. В среде Matlab для численной реализации итерационного метода (5) был разработан комплекс программ. Для модельной задачи проведены численные эксперименты. Итерационный параметр подбирался эмпирически. Расчеты проводились для следующих характеристик: $a = 20$ см, $t_1 = t_2 = 0.05$ см, $t = 1$ см, $G_{13} = 25$ МПа, $E_3 = 50$ МПа, $X_{(2)}^3 = 0$, $E^{(k)} = 133 \cdot 10^3$ МПа, $\nu_{12}^{(k)} = \nu_{21}^{(k)} = 0.3$, $X_{(k)}^1 = 0$, $M_{(k)}^1 = 0$, $k = 1, 2$. Число точек сетки $N = 500$. Начальное приближение $U^{(0)}$ задавалось нулевым. Поперечная нагрузка варьировалась от $X_{(1)}^3 = 0.1$ МПа до $X_{(1)}^3 = 0.5$ МПа. Результаты численных расчетов приведены на рис. 2–31. Как и следовало ожидать, поскольку $q^1(0) = 0$ (отсутствует адгезионное соединение заполнителя с опорным элементом), то вся реакция в правом торцевом сечении воспринимается внешними несущими слоями что и приводит к концентрации перерезывающих сил $Q_{(k)}^1$ в этом сечении (рис. 3, 9, 15, 21, 27). Близость значений прогибов свидетельствует о несущественном обжатии заполнителя в поперечном направлении по всей длине пластины (рис. 6, 12, 18, 24, 30).

$$X_{(1)}^3 = 0.1 \text{ МПа}$$

Рис. 2. Обобщенные перерезывающие силы

Рис. 3. Перерезывающие силы в несущих слоях

Рис. 4. Мембранные усилия в несущих слоях

Рис. 5. Осевые перемещения несущих слоев

Рис. 6. Прогобы в несущих слоях

Рис. 7. Касательные напряжения в заполнителе

$$X_{(1)}^3 = 0.2 \text{ МПа}$$

Рис. 8. Обобщенные перерезывающие силы

Рис. 9. Перерезывающие силы в несущих слоях

Рис. 10. Мембранные усилия в несущих слоях

Рис. 11. Осевые перемещения несущих слоев

Рис. 12. Проггибы в несущих слоях

Рис. 13. Касательные напряжения в заполнителе

$$X_{(1)}^3 = 0.3 \text{ МПа}$$

Рис. 14. Обобщенные перерезывающие силы

Рис. 15. Перерезывающие силы в несущих слоях

Рис. 16. Мембранные усилия в несущих слоях

Рис. 17. Осевые перемещения несущих слоев

Рис. 18. Прогибы в несущих слоях

Рис. 19. Касательные напряжения в заполнителе

$$X_{(1)}^3 = 0.4 \text{ МПа}$$

Рис. 20. Обобщенные перерезывающие силы

Рис. 21. Перерезывающие силы в несущих слоях

Рис. 22. Мембранные усилия в несущих слоях

Рис. 23. Осьевые перемещения несущих слоев

Рис. 24. Прогибы в несущих слоях

Рис. 25. Касательные напряжения в заполнителе

$$X_{(1)}^3 = 0.5 \text{ МПа}$$

Рис. 26. Обобщенные перерезывающие силы

Рис. 27. Перерезывающие силы в несущих слоях

Рис. 28. Мембранные усилия в несущих слоях

Рис. 29. Осевые перемещения несущих слоев

Рис. 30. Прогибы в несущих слоях

Рис. 31. Касательные напряжения в заполнителе

С ростом поперечной нагрузки $X_{(1)}^3$ растут как прогибы точек срединной поверхности (рис. 6, 12, 18, 24, 30), так и мембранные усилия (рис. 4, 10, 16, 22, 28), сжимающие в первом несущем слое, к которому приложена нагрузка (сплошные линии), и растягивающие – во втором несущем слое (пунктирные линии). Геометрическая нелинейность начинает существенно сказываться на осевых перемещениях точек срединной поверхности (рис. 5, 11, 17, 23, 29) при больших значениях поперечной нагрузки. В частности, в точке $x=0$ осевые

перемещения во втором несущем слое сначала отрицательные, а при увеличении $X_{(1)}^3$ они становятся положительными, что вызвано увеличением влияния на процесс деформирования значений прогибов.

3. Заключение.

В настоящей работе проведено численное исследование геометрически нелинейной задачи о поперечном изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем при различных поперечных нагрузках. Это позволит в дальнейшем исследовать формы потери устойчивости пластины [41–45] на основе метода продолжения по параметру. Исследование корректности постановки можно провести по аналогии с [46–49].

Публикация осуществлена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан в рамках научных проектов 15-41-02569, 16-08-00316, 16-38-00788.

Литература:

1. Иванов В.А., Паймушин В.Н., Полякова Т.В. Уточненная теория устойчивости трехслойных конструкций (линеаризованные уравнения нейтрального равновесия и простейшие одномерные задачи) // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1995. – № 3. – С. 15–24.
2. Паймушин В.Н., Шалашилин В.И. О геометрически нелинейных уравнениях теории безмоментных оболочек с приложениями к задачам о неклассических формах потери устойчивости цилиндра // Прикладная математика и механика. – 2006. – Т. 70, № 1. – С. 100–110.
3. Paimushin V.N., Polyakova N.V. The consistent equations of the theory of plane curvilinear rods for finite displacements and linearized problems of stability // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2009. – V. 73, № 2. – С. 220–236.
4. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н. О взаимодействии композитной пластины, имеющей вибропоглощающее покрытие, с падающей звуковой волной // Известия высших учебных заведений.

Математика. – 2015. – № 3. – С. 75–82.

5. Паймушин В.Н., Холмогоров С.А., Бадриев И.Б., Макаров М.В. Геометрически и физически нелинейная задача о трехточечном изгибе композитных тест-образцов // В книге: Материалы XXII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет). – Москва: ООО "ТРИП", 2016. – С. 197–202.
6. Badriev I.B., Banderov V.V., Makarov M.V., Paimushin V.N. Determination of stress-strain state of geometrically nonlinear sandwich plate // Applied Mathematical Sciences. – 2015. – V. 9, № 77–80. – P. 3887–3895.
7. Бадриев И.Б., Желтухин В.С., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Численное решение задачи о равновесии трехслойной пластины с трансверсально-мягким наполнителем в геометрически нелинейной постановке // Вестник Казанского технологического университета. – 2014. – Т.17, № 23. – С. 393–396.
8. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Решение нелинейных задач теории многослойных оболочек с трансверсально-мягким наполнителем // В сборнике: Сеточные методы для краевых задач и приложения. Материалы Десятой Международной конференции. – Казань: Изд-во Казанского университета, 2014. – С. 103–107.
9. Бадриев И.Б., Гарипова Г.З., Макаров М.В., Паймушин В.Н., Хабибуллин Р.Ф. О решении физически нелинейных задач о равновесии трехслойных пластин с трансверсально-мягким наполнителем // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2015. – Т. 157, № 1. – С. 15–24.
10. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Гарипова Г.З., Макаров М.В. О разрешимости нелинейной задачи о равновесии трехслойной пластины // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2015. – Т. 20, № 5. – С. 1034–1037.
11. Badriev I.B., Garipova G.Z., Makarov M.V., Paimushin V.N., Khabibullin R.F. Solving Physically Nonlinear Equilibrium Problems for Sandwich Plates with a Transversally Soft Core // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2015. – Vol.

36, № 4. – P. 474–481.

12. Badriev I.B., Banderov V.V., Garipova G.Z., Makarov M.V., Shagidullin R.R. On the solvability of geometrically nonlinear problem of sandwich plate theory // *Applied Mathematical Sciences*. – 2015. – V. 9, № 81–84. – P. 4095-4102.
13. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Гарипова Г.З., Макаров М.В. Исследование задачи об определении НДС физически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Казань, 20–24 августа 2015 г.): сборник трудов. – Казань: Издательство Казанского (Приволжского) федерального университета, 2015. – С. 276.
14. Бадриев И.Б., Гарипова Г.З., Макаров М.В. Приближенные методы решения задачи об изгибе трехслойной пластины с идеально упруго-пластическим заполнителем // В книге: Материалы XXII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет). – Москва: ООО "ТРИП", 2016. – С. 31–33.
15. Бадриев И.Б., Гарипова Г.З., Макаров М.В. Сеточные аппроксимации физически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // В сборнике: Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна - 2016. Материалы международной конференции. – Воронеж: Издательско-полиграфический центр «Научная книга», 2016. – С. 70–72.
16. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Разрешимость физически и геометрически нелинейной задачи теории трехслойных пластин с трансверсально-мягким заполнителем // *Известия высших учебных заведений. Математика*. – 2015. – № 10. – С. 66–71.
17. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Гарипова Г.З. О решении физически нелинейных задач о равновесии трехслойных пластин // В книге: Теория управления и математическое моделирование Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова. Удмуртский государственный университет, – Ижевск: Изд-во "Удмуртский

университет", 2015. – С. 235–237.

18. Badriev, I.B., Shagidullin, R.R. A study of the convergence of a recursive process for solving a stationary problem of the theory of soft shells // *Journal of Mathematical Sciences*. – 1995. – V. 73, № 5. – P. 519–525.
19. Бадриев И.Б., Бандеров В.В. Итерационные методы решения вариационных неравенств теории мягких оболочек // *Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки*. – 2013. – Т. 155, № 2. – С. 18–32.
20. Бадриев И.Б. Решение вариационных задач нелинейных процессов механики сплошной среды // В книге: *Теория управления и математическое моделирование Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова. Удмуртский государственный университет*. – Ижевск: Изд-во "Удмуртский университет", 2015. – С. 234–235.
21. Бадриев И.Б. О решении вариационных неравенств второго рода // В сборнике: *Сеточные методы для краевых задач и приложения Материалы Девятой Всероссийской конференции*. – Казань: Отечество, 2012. – С. 32–35.
22. Бадриев И.Б. О решении вариационных неравенств второго рода с операторами монотонного типа // В сборнике: *Материалы XIX Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2015)* – М: Изд-во МАИ, 2015. – С. 374–375.
23. Бадриев И.Б., Бандеров В.В. Численное моделирование деформирования биокomпозитов // В книге: *Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред Материалы XXI международного симпозиума имени А.Г. Горшкова. Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)*. – Москва: ООО "ТРП", 2015. – С. 7–9.
24. Badriev I.B., Banderov V.V. Iterative methods for solving variational inequalities of the theory of soft shells // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. – 2014. – V. 35, № 4. – P. 371–383.

25. Бадриев И.Б., Задворнов О.А. Исследование разрешимости стационарных задач для сетчатых оболочек // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1992. – № 11. – С. 3–7.
26. Паймушин В.Н., Бобров С.Н. Уточненная геометрически нелинейная теория трехслойных оболочек с трансверсально-мягким заполнителем средней толщины для исследования смешанных форм потери устойчивости // Механика композитных материалов. – 2000. – Т. 36, № 1. – С. 95–108.
27. Паймушин В.Н. К вариационным методам решения нелинейных пространственных задач сопряжения деформируемых тел // Доклады Академии наук. – 1983. – Т. 273, № 5. – С. 1083–1086.
28. Паймушин В.Н. Нелинейная теория среднего изгиба трехслойных оболочек с дефектами в виде участков непрочекля // Прикладная механика. – 1987. – Т. 23, № 11. – С. 32–38.
29. Бадриев И.Б., Карчевский М.М. Применение метода двойственности к решению нелинейных задач теории фильтрации с предельным градиентом // Дифференциальные уравнения. – 1982. – Т. 18, № 7. – С. 1133–1144.
30. Badriev I.B. On the solving of variational inequalities of stationary problems of two-phase flow in porous media // Applied Mechanics and Materials. – 2013. – V. 392. – P. 183–187.
31. Badriev I.B., Banderov V.V. Numerical method for solving variation problems in mathematical physics // Applied Mechanics and Materials. – 2014. – V. 668–669. – P. 1094–1097.
32. Badriev, I.B., Karchevskii, M.M. Convergence of an iterative process in a Banach space // Journal of Mathematical Sciences. – 1994. – V. 71, № 6. – P. 2727–2735.
33. Бадриев И.Б., Нечаева Л.А. Математическое моделирование установившейся фильтрации с многозначным законом // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2013. – № 3. – С. 35–62.
34. Бадриев И.Б., Задворнов О.А. Исследование стационарной задачи фильтрации с многозначным законом при наличии точечного источника // Дифференциальные уравнения. – 2005. – Т. 41, № 7. – С. 874–880.

35. Желтухин В.С., Чебакова В.Ю., Шнейдер М.Н. Моделирование ВЧЕ-разряда при больших межэлектродных расстояниях // В сборнике: Сеточные методы для краевых задач и приложения. Материалы Девятой Всероссийской конференции. – Казань: Отечество, 2012. – С. 183–186.
36. Zheltukhin V.S., Solov'ev S.I., Solov'ev P.S., Chebakova V.Y. Computation of the minimum eigenvalue for a nonlinear Sturm-Liouville problem // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2014. – V. 35, № 4. – P. 416–426.
37. Абдуллин И.Ш., Желтухин В.С., Чебакова В.Ю., Шнейдер М.Н. Тематическая модель ВЧЕ-разряда в аргоне при больших межэлектродных расстояниях // Вестник Казанского технологического университета. – 2013. – Т. 16, № 22. – С. 334–338.
38. Бикчантаев Д.Х., Желтухин В.С., Чебакова В.Ю. Численное исследование процесса взаимодействия высокочастотного емкостного разряда с материалами // В книге: Теория управления и математическое моделирование. Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова. Удмуртский государственный университет. – Ижевск: Изд-во "Удмуртский университет", 2015. – С. 241–242.
39. Желтухин В.С., Соловьёв С.И., Соловьёв П.С., Чебакова В.Ю. Вычисление минимального собственного значения нелинейной задачи Штурма – Лиувилля // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2013. – Т. 155, № 3. – С. 91–104.
40. Чебакова В.Ю. Численное моделирование высокочастотного емкостного разряда // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2015. – Т. 157. № 2. – С. 126–140.
41. Макаров М.В., Бадриев И.Б., Паймушин В.Н. Определение критических точек бифуркации для задачи о геометрически нелинейном поведении трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // В сборнике: Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна - 2016. Материалы международной конференции. – Воронеж: Издательско-полиграфический центр «Научная книга», 2016. – С. 292–294.
42. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Работа внешних сил, как

параметр продолжения решения нелинейной задачи продольно-поперечного изгиба трехслойных пластин // В сборнике: XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Сборник докладов. – Казань: Издательство Казанского (Приволжского) федерального университета, 2015. – С. 277–278.

43. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Решение геометрически нелинейной и линеаризованной задач о смешанных формах потери устойчивости трехслойной пластины // В книге: Теория управления и математическое моделирование Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова. Удмуртский государственный университет. – Ижевск: Изд-во "Удмуртский университет", 2015. – С. 239–241.
44. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Геометрически нелинейные и линеаризованные задачи о смешанных формах потери устойчивости трехслойных пластин при продольно-поперечном изгибе // В книге: Материалы XXI Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А. Г. Горшкова Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет). – Москва: ООО "ТРП", 2015. – С. 10–12.
45. Макаров М.В., Бадриев И.Б., Паймушин В.Н. Нелинейные задачи о смешанных формах потери устойчивости трехслойных пластин при продольно-поперечном изгибе // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2015. – Т. 20, № 5. – С. 1275–1278.
46. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Мартынова О.П. Постановка геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // Тенденции науки и образования в современном мире. – 2016. – № 16-1. – С. 5–11.
47. Badriev I.B., Zadvornov O.A., Saddek A.M. Convergence analysis of iterative methods for some variational inequalities with pseudomonotone operators // Differential Equations. – 2001. – Т. 37, № 7. – С. 934–942.

48. Бадриев И.Б., Шагидуллин Р.Р. Исследование одномерных уравнений статического состояния мягкой оболочки и алгоритма их решения // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1992. – № 1. – С. 8–16.
49. Бадриев И.Б., Ляшко А.Д., Панкратова О.В. Исследование сходимости итерационных методов решения нелинейных задач теории фильтрации // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1998. – № 11. – С. 8–13.