Бадриев И.Б., Макаров М.В., Мартынова О.П.
*Казанский (Приволжский) федеральный университет
Казань, Россия*

doi: 10.18411/lj2016-7-1-01

idsp 000001: lj2016-16-1-01

Постановка геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем

Введение

Создание изделий авиационной и космической техники, судостроения, строительства в настоящее время неразрывно связано с применением новых конструкционных материалов и элементов конструкций из них, обладающих высокими прочностными и жесткостными характеристиками. Таким требованиям отвечают слоистые элементы конструкций, в частности, трехслойные [1–3].

Рис 1. Общий вид трехслойной конструкции: А – несущие слои; В – заполнитель.

Эти конструкции состоят из материалов с различными физико-механическими свойствами – несущие слои обычно изготавливаются из материалов с высокими механическими характеристиками и предназначены для восприятия основной нагрузки; связующий слой, служащий для образования монолитной конструкции, обеспечивает перераспределение усилий между несущими слоями, выполняет функции защиты от тепловых, химических, радиационных и других нежелательных воздействий. Применение в качестве заполнителя материалов с низкими массовыми характеристиками позволяет при сравнительно небольшом увеличении веса конструкции существенно повысить изгибную жесткость. Тем самым трехслойные конструкции нашли широкое применение в качестве несущих и управляющих поверхностей летательных аппаратов, обтекателей, теплозащитных и силовых экранов, разного рода панелей и других конструктивных элементов [4–6].

Настоящая работа посвящена исследованию корректности обобщенной постановки геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем. Обобщенная постановка для физически нелинейной и геометрически линейной задачи в виде седловой задачи, а также метод для ее решения рассмотрены в [7–11].

1. Постановка задачи.

В данной работе рассматриваются задачи об определении напряженно-деформированного состояния бесконечно длинной трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем (см. рис. 2). Ширина пластины равна a , толщина заполнителя составляет $2h$, толщины несущих слоев равны $2h_{(k)}$, где k – номер слоя. Исследование процессов деформирования таких элементов прежде всего диктуется необходимостью определения степени их пригодности для дальнейшего использования.

Рис 2. Бесконечно длинная трехслойная пластина с трансверсально-мягким заполнителем.

Для описания напряженно-деформированного состояния в несущих слоях используются уравнения модели Кирхгофа-Лява, в заполнителе – уравнения теории упругости, упрощенные в рамках принятой модели трансверсально-мягкого слоя и проинтегрированных по толщине с удовлетворением условий сопряжения слоев по перемещениям [12–14].

В соответствии с [12–14] введем следующие обозначения (см. рис. 3):

$H_{(k)} = h + h_{(k)}$ (здесь и всюду в дальнейшем предполагаем, что $k = 1, 2$), $X_{(k)}^1$, $X_{(k)}^3$ – компоненты поверхностной нагрузки, приведенной к срединной поверхности k -го слоя, $w^{(k)}$ и $u^{(k)}$ – прогибы и осевые перемещения точек срединной поверхности k -го слоя соответственно, $T_{(k)}^{11}$, $M_{(k)}^{11}$ – мембранные усилия и внутренние изгибающие моменты в k -м слое соответственно.

Рис 3. Поперечное сечение трехслойной пластины.

Края пластины предполагаем закрепленными, так что выполняются условия $u^{(k)}(x) = 0$, $w^{(k)}(x) = 0$, $d w^{(k)} / dx = 0$ при $x = 0$, $x = a$.

Будем рассматривать задачу в геометрически нелинейной постановке, т.е.

$$T_{(k)}^{11} = B_{(k)} \left(d u^{(k)} / dx + \frac{1}{2} (d w^{(k)} / dx)^2 \right), \quad M_{(k)}^{11} = D_{(k)} d^2 u^{(k)} / dx^2, \quad \text{где}$$

$B_{(k)} = 2h_{(k)} E^{(k)} / (1 - \nu_{12}^{(k)})(1 - \nu_{21}^{(k)})$ – жесткость k -го слоя на растяжение–сжатие,

$E^{(k)}$ и $\nu_{12}^{(k)}$, $\nu_{21}^{(k)}$ – модуль упругости первого рода и коэффициенты Пуассона материала k -го несущего слоя, $D_{(k)} = B_{(k)} h_{(k)}^2 / 3$ – изгибная жесткость k -го слоя.

Пусть $U = (w^{(1)}, w^{(2)}, u^{(1)}, w^{(2)})$ – вектор перемещений точек срединной поверхности k -го слоя, q^1 – касательные напряжения в заполнителе. Для q^1 предполагаем выполненными граничные условия $q^1(0) = q^1(a) = 0$.

В [12–14] для описания напряженно-деформированного состояния трехслойной пластины был построен следующий функционал потенциальной энергии деформаций: $L(U, q^1) = P(U, q^1) - A(U, q^1) - A_q(U, q^1)$, где

$$P(U, q^1) = \frac{1}{2} \int_0^a \left\{ \sum_{k=1}^2 \left[B_{(k)} \left(d u^{(k)} / dx + \frac{1}{2} (d w^{(k)} / dx)^2 \right)^2 + D_{(k)} (d^2 w^{(k)} / dx^2)^2 \right] + \right. \\ \left. + c_1 (q^1)^2 + c_2 (d q^1 / dx)^2 + c_3 (w^{(2)} - w^{(1)})^2 \right\} dx$$

есть потенциальная энергия деформации, G_{13} , E_3 – модули поперечного сдвига и обжатия заполнителя, $c_1 = 2h / G_{13}$, $c_2 = h^3 / 3 E_3$, $c_3 = E_3 / (2h)$,

$$A(U, q^1) = \int_0^a \sum_{k=1}^2 [X_{(k)}^1 u^{(k)} + M_{(k)}^1 d w^{(k)} / dx + X_{(k)}^3 w^{(k)}] dx$$

есть работа заданных внешних сил и моментов, $M_{(k)}^1$ – поверхностный момент внешних сил, приведенный к срединной поверхности k -го слоя,

$$A_q(U, q^1) = \int_0^a [(u^{(1)} - u^{(2)}) - \sum_{k=1}^2 H_{(k)} d w^{(k)} / dx + c_1 q^1 - c_2 d^2 q^1 / dx^2] q^1 dx$$

есть работа неизвестных контактных касательных напряжений на соответствующих перемещениях.

При этом установлено [15], что решение задачи о равновесии трехслойной пластины есть стационарные точки функционала L.

Предполагаем, что все постоянные $B_{(k)}$, $D_{(k)}$, c_1 , c_2 , c_3 , G_{13} , E_3 , $E^{(k)}$, $\nu_{12}^{(k)}$, $\nu_{21}^{(k)}$, h , $h_{(k)}$ положительны.

2. Исследование корректности постановки задачи.

Обозначим через $V_k = W_2^{(k)}(0, a)$ пространства Соболева со скалярными

произведениями $(u, \eta)_k = \int_0^a d^k u / dx^k d^k \eta / dx^k dx$, через V_q – пространство Соболева функций, имеющих компактный носитель на $(0, a)$ и первую обобщенную производную, суммируемую с квадратом, со скалярным

произведением $(y, z)_q = \int_0^a [c_1 y(x) z(x) + c_2 d y / dx d z / dx] dx$. Положим

$V = V_2 \times V_2 \times V_1 \times V_1$, Скалярное произведение в V будем обозначать через $(\cdot, \cdot)_V$.

Докажем, что функционал L корректно определен на $V_1 \times V_q$.

Перепишем (с учетом граничных условий для q^1) функционал L в виде $L(U, q^1) = \Phi_0(U) + \Phi_1(U, q^1) - \Phi_2(q^1)$, где

$$\begin{aligned} \Phi_0(U) = & \frac{1}{2} \int_0^a \left\{ \sum_{k=1}^2 \left[B_{(k)} (d u^{(k)} / dx + \frac{1}{2} (d w^{(k)} / dx)^2)^2 + D_{(k)} (d^2 w^{(k)} / dx^2)^2 \right] + \right. \\ & \left. + c_3 (w^{(2)} - w^{(1)})^2 \right\} dx - \int_0^a \sum_{k=1}^2 [X_{(k)}^1 u^{(k)} + M_{(k)}^1 d w^{(k)} / dx + X_{(k)}^3 w^{(k)}] dx, \\ \Phi_1(U, q^1) = & \int_0^a \left[\sum_{k=1}^2 H_{(k)} d w^{(k)} / dx + (u^{(2)} - u^{(1)}) \right] q^1 dx, \end{aligned}$$

$$\Phi_2(q^1) = \frac{1}{2} \int_0^a \left[c_1 (q^1)^2 + c_2 (d q^1 / dx)^2 \right] dx = \frac{1}{2} \| q^1 \|_q^2.$$

При исследовании корректности постановки задачи нам потребуется следующая теорема вложения Соболева [16, стр.68].

Теорема 1. Пусть $\Omega \subset R^n$ – ограниченная область с регулярной границей Γ и $1 \leq p < \infty$. Тогда $W_p^{(k)}(\Omega) \subset W_r^{(j)}(\Omega)$ для $0 \leq j < k$ и каждого r , удовлетворяющего условию $1/p - (k - j)/n \leq 1/r < 1$; кроме того, для любой функции $u \in W_p^{(k)}(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\|u\|_{j,r} \leq C_{jr}^{kp} \|u\|_{k,p}, \quad (1)$$

где $\|\cdot\|_{k,p}$ – норма в $W_p^{(k)}(\Omega)$, а постоянная C_{jr}^{kp} зависит от Ω, j, k, p, r .

Докажем, что функционал Φ_0 корректно определен на V , Φ_1 корректно определен на $V \times V_q$, Φ_2 корректно определен на V_q .

Лемма 1. Пусть $X_{(k)}^1, X_{(k)}^3, M_{(k)}^1 \in L_2(0, a)$. Тогда для любой функции $U \in V$, справедливо неравенство

$$|\Phi_0(U)| \leq \sum_{k=1}^2 [d_0^k \|w^{(k)}\|_2^2 + d_1^k \|w^{(k)}\|_2^2 + d_2^k \|w^{(k)}\|_2^4 + d_3^k \|u^{(k)}\|_1 + d_4^k \|u^{(k)}\|_1^2] \quad (2)$$

где $d_0^k = \|M_{(k)}^1\|_0 C_{12}^{22} + \|X_{(k)}^3\|_0 C_{02}^{22}$, $d_1^k = D_{(k)} + 2c_3 (C_{02}^{22})^2$, $d_2^k = B_{(k)} (C_{12}^{22})^4$, $d_3^k = \|X_{(k)}^1\|_0 C_{02}^{21}$, $d_4^k = B_{(k)}$.

Доказательство. В дальнейшем норму в $L_2(0, a)$ будем обозначать через $\|\cdot\|_0$. Применяя неравенство $(\alpha + \beta)^2 \leq 2(\alpha^2 + \beta^2)$ и неравенство Коши–Буняковского, имеем

$$\begin{aligned} |\Phi_0(U)| \leq & \frac{1}{2} \int_0^a \sum_{k=1}^2 \left[B_{(k)} \left(2 \left(\frac{du^{(k)}}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{dw^{(k)}}{dx} \right)^4 \right) + D_{(k)} \left(\frac{d^2 w^{(k)}}{dx^2} \right)^2 \right] dx + \\ & + c_3 \frac{1}{2} \int_0^a ((w^{(2)})^2 + (w^{(1)})^2) dx + \sum_{k=1}^2 \left[\int_0^a (X_{(k)}^1)^2 dx \right]^{1/2} \left[\int_0^a (u^{(k)})^2 dx \right]^{1/2} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^2 \left[\int_0^a (X_{(k)}^3)^2 dx \right]^{1/2} \left[\int_0^a (w^{(k)})^2 dx \right]^{1/2} + \sum_{k=1}^2 \left[\int_0^a (M_{(k)}^1)^2 dx \right]^{1/2} \times \\
& \times \left[\int_0^a \left(\frac{d^2 w^{(k)}}{dx^2} \right)^2 dx \right]^{1/2} = \sum_{k=1}^2 [B_{(k)} \|u^{(k)}\|_{1,2}^2 + \frac{1}{2} B_{(k)} \|w^{(k)}\|_{1,4}^4 + \\
& + D_{(k)} \|w^{(k)}\|_{2,2}^2 + 2c_3 \|w^{(2)}\|_{0,2}^2 + 2c_3 \|w^{(1)}\|_{0,2}^2 + \\
& + \sum_{k=1}^2 \|X_{(k)}^1\|_0 \|u^{(k)}\|_{0,2} + \sum_{k=1}^2 \|X_{(k)}^3\|_0 \|w^{(k)}\|_{0,2} + \sum_{k=1}^2 \|M_{(k)}^1\|_0 \|w^{(k)}\|_{1,2}].
\end{aligned}$$

По определению $\|u^{(k)}\|_{1,2} = \|u^{(k)}\|_1$, $\|w^{(k)}\|_{2,2} = \|w^{(k)}\|_2$. Далее, в силу (1)

$$\begin{aligned}
\|w^{(k)}\|_{1,4} & \leq C_{14}^{22} \|w^{(k)}\|_{2,2} = C_{14}^{22} \|w^{(k)}\|_2, \quad \|w^{(k)}\|_{0,2} \leq C_{02}^{22} \|w^{(k)}\|_{2,2} = C_{02}^{22} \|w^{(k)}\|_2, \\
\|u^{(k)}\|_{0,2} & \leq C_{02}^{12} \|u^{(k)}\|_{1,2} = C_{02}^{12} \|u^{(k)}\|_1, \quad \|w^{(k)}\|_{1,2} \leq C_{12}^{22} \|w^{(k)}\|_{2,2} = C_{12}^{22} \|w^{(k)}\|_2.
\end{aligned}$$

С учетом этих оценок окончательно получаем требуемое неравенство (2).

Замечание 1. Результат леммы справедлив и для менее гладких функций

$$X_{(k)}^1, X_{(k)}^3, w^{(k)}, M_{(k)}^1.$$

Лемма 2. Для любых $U \in V$, $q^1 \in V_q$ справедливо неравенство

$$|\Phi_1(U)| \leq \sum_{k=1}^2 [d_5 \|u^{(k)}\|_1 + d_6^k \|w^{(k)}\|_2] \|q^1\|_q, \quad (3)$$

где $d_5 = c_1^{-1/2} C_{02}^{12}$, $d_6^k = c_1^{-1/2} C_{12}^{22} H_{(k)}$.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}
|\Phi_1(U, q^1)| & \leq \int_0^a \left[\sum_{k=1}^2 H_{(k)} |dw^{(k)}/dx| + |u^{(2)} - u^{(1)}| \right] |q^1| dx \leq \\
& \leq \sum_{k=1}^2 [H_{(k)} \|w^{(k)}\|_{1,2} \|q^1\|_0 + (\|u^{(2)}\|_0 + \|u^{(1)}\|_0) \|q^1\|_0]
\end{aligned}$$

Далее, в силу теоремы 1 $\|u^{(k)}\|_0 \leq C_{02}^{12} \|u^{(k)}\|_1$, $\|w^{(k)}\|_{1,2} \leq C_{12}^{22} \|w^{(k)}\|_2$,

кроме того, $\|q^1\|_0^2 \leq \frac{1}{c_1} \int_0^a [c_1 |q^1|^2 + c_2 |dq^1/dx|^2] dx = \frac{1}{c_1} \|q^1\|_q^2$. С учетом этих

неравенств и получаем оценку (3).

Теорема 2. Пусть $X_{(k)}^1$, $X_{(k)}^3$, $M_{(k)}^1 \in L_2(0, a)$. Тогда функционал Φ_0 корректно определен на V , функционалы L , Φ_1 корректно определены на $V \times V_q$, Φ_2 корректно определен на V_q .

Доказательство. Корректность определения функционалов Φ_0 , Φ_1 на соответствующих пространствах следует из лемм 1, 2, Φ_2 корректно определен, ибо равен полуквадрату нормы, таким образом корректно определен на $V \times V_q$ и функционалы L .

3. Заключение.

В настоящей работе проведено исследование корректности обобщенной постановки геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем. Решение задачи о равновесии трехслойной пластины есть стационарные точки корректно определенного функционала. Это позволит в дальнейшем сформулировать обобщенную постановку в виде операторного уравнения, исследовать ее разрешимость и разработать и исследовать приближенные методы решения полученного операторного уравнения. При этом предполагается использовать подходы, разработанные в [17–26] подходы.

Публикация осуществлена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан в рамках научных проектов № 15-41-02569, 15-01-05686, 16-38-00788.

Литература:

1. Иванов В.А., Паймушин В.Н., Полякова Т.В. Уточненная теория устойчивости трехслойных конструкций (линеаризованные уравнения нейтрального равновесия и простейшие одномерные задачи) // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1995. – № 3. – С. 15–24.
2. Иванов В.А., Паймушин В.Н. Уточнение уравнений динамики многослойных оболочек с трансверсально-мягким заполнителем // Известия Российской академии наук. Механика тв. тела. – 1995. – № 3. – С. 142–152.
3. Паймушин В.Н., Шалашилин В.И. О геометрически нелинейных уравнениях теории безмоментных оболочек с приложениями к задачам о неклассических формах потери устойчивости цилиндра // Прикладная математика и механика. – 2006. – Т. 70, № 1. – С. 100–110.
4. Paimushin V.N., Polyakova N.V. The consistent equations of the theory of plane curvilinear rods for finite displacements and linearized problems of stability // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2009. – V. 73, № 2. – С. 220–236.
5. Paimushin V.N., Firsov V.A., Gyunal I., Egorov A.G. Theoretical-experimental method for determining the parameters of damping based on the study of damped flexural vibrations of test specimens. 1. Experimental basis // Mechanics of Composite Materials. – 2014. – V. 50, № 2. – P. 127-136.
6. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н. О взаимодействии композитной пластины, имеющей вибропоглощающее покрытие, с падающей звуковой волной // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2015. – № 3. – С. 75–82.
7. Бадриев И.Б., Гарипова Г.З., Макаров М.В., Паймушин В.Н., Хабибуллин Р.Ф. О решении физически нелинейных задач о равновесии трехслойных пластин с трансверсально-мягким заполнителем // Ученые записки

Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2015. – Т. 157, № 1. – С. 15–24.

8. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Гарипова Г.З., Макаров М.В. О разрешимости нелинейной задачи о равновесии трехслойной пластины // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2015. – Т. 20, № 5. – С. 1034–1036.
9. Badriev I.B., Garipova G.Z., Makarov M.V., Paimushin V.N., Khabibullin R.F. Solving Physically Nonlinear Equilibrium Problems for Sandwich Plates with a Transversally Soft Core // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2015. – Vol. 36, № 4. – P. 474–481.
10. Badriev I.B., Banderov V.V., Garipova G.Z., Makarov M.V., Shagidullin R.R. On the solvability of geometrically nonlinear problem of sandwich plate theory // Applied Mathematical Sciences. – 2015. – V. 9, № 82. – P. 4095–4102.
11. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Гарипова Г.З., Макаров М.В. Исследование задачи об определении НДС физически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Казань, 20–24 августа 2015 г.): сборник трудов. – Казань: Издательство Казанского (Приволжского) федерального университета, 2015. – С. 276.
12. Паймушин В.Н., Бобров С.Н. Уточненная геометрически нелинейная теория трехслойных оболочек с трансверсально-мягким заполнителем средней толщины для исследования смешанных форм потери устойчивости // Механика композитных материалов. – 2000. – Т. 36, № 1. – С. 95–108.
13. Паймушин В.Н. К вариационным методам решения нелинейных пространственных задач сопряжения деформируемых тел // Доклады Академии наук. – 1983. – Т. 273, № 5. – С. 1083–1086.
14. Паймушин В.Н. Нелинейная теория среднего изгиба трехслойных оболочек с дефектами в виде участков непрочлея // Прикладная механика. – 1987. – Т. 23, № 11. – С. 32–38.

15. Паймушин В.Н. Обобщенный вариационный принцип Рейсснера в нелинейной механике пространственных составных тел с приложениями к теории многослойных оболочек // Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела. – 1987. – № 2. – С. 171–180.
16. Adams R.A. Sobolev Spaces. – New York, San Francisco, London: Academic Press, 1975. – 286 p.
17. Бадриев И.Б., Карчевский М.М. Применение метода двойственности к решению нелинейных задач теории фильтрации с предельным градиентом // Дифференциальные уравнения. – 1982. – Т. 18, № 7. – С. 1133–1144.
18. Badriev I.B. On the solving of variational inequalities of stationary problems of two-phase flow in porous media // Applied Mechanics and Materials. - 2013. - V. 392. - P. 183-187.
19. Badriev I.B., Banderov V.V. Iterative methods for solving variational inequalities of the theory of soft shells // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2014. – V. 35, № 4. – P. 371-383.
20. Badriev I.B., Banderov V.V. Numerical method for solving variation problems in mathematical physics // Applied Mechanics and Materials. - 2014. - V. 668-669. - P. 1094-1097.
21. Badriev, I.B., Shagidullin, R.R. A study of the convergence of a recursive process for solving a stationary problem of the theory of soft shells // Journal of Mathematical Sciences. – 1995. – V. 73, № 5. – P. 519–525.
22. Badriev, I.B., Karchevskii, M.M. Convergence of an iterative process in a Banach space // Journal of Mathematical Sciences. – 1994. – V. 71, № 6. – P. 2727–2735.
23. Бадриев И.Б., Нечаева Л.А. Математическое моделирование установившейся фильтрации с многозначным законом // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2013. – № 3. – С. 35–62.
24. Бадриев И.Б., Желтухин В.С., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Численное

решение задачи о равновесии трехслойной пластины с трансверсально-мягким наполнителем в геометрически нелинейной постановке // Вестник Казанского технологического университета. – 2014. – Т.17, № 23. – С. 393–396.

25. Бадриев И.Б., Бандеров В.В. Итерационные методы решения вариационных неравенств теории мягких оболочек // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2013. – Т. 155, кн.2. – С. 18–32.

26. Badriev I.B., Banderov V.V., Makarov M.V., Paimushin V.N. Determination of stress-strain state of geometrically nonlinear sandwich plate // Applied Mathematical Sciences. – 2015. – V. 9, № 78. – P. 3887–3895.