Гефан Г.Д., Базилевский М.П.
*Иркутский государственный университет путей сообщения
Иркутск, Россия*

doi: 10.18411/lj2016-5-2-06

Игровое обучение теории игр

Аннотация

Математические идеи, не подкреплённые конкретными убедительными иллюстрациями, часто остаются для студентов скучными абстракциями. Чтобы избежать этого, можно применять игровые методы обучения. В статье показано, как организовать такое занятие при изучении математической теории игр.

Abstract

Mathematical ideas not backed by specific convincing illustrations, often look as the boring abstractions. To avoid this, you can use game methods for training. The article shows how to organize such activity in the study of the mathematical theory of games.

Название этой статьи можно принять за тавтологию или даже попытку каламбура, но в действительности оно достаточно точно отражает существо дела. Игровые методы обучения, характеризующиеся эмоционально напряженной, состязательной деятельностью, активизацией познавательного интереса, высокой ответственностью каждого участника команды за общий результат, давно доказали свою эффективность. Конечно, в математике слово «игра» используется в несколько ином смысле, чем в педагогике и психологии. Тем не менее, можно предположить, что игровые методы будут как нельзя более уместны именно при

обучении теории игр. Это одна из наиболее интересных областей математики, занимающаяся ситуациями, в которых конкурирующие стороны ведут борьбу за реализацию своих интересов.

Ключевым вопросом теории игр является вопрос о так называемой оптимальной стратегии, т.е. такой стратегии, которая при многократном повторении игры обеспечивает игроку максимальный средний выигрыш при любых возможных стратегиях другого игрока. Оказалось, что эта задача в общем случае решается так: необходимо применять свои «чистые» стратегии стохастическим образом, с определённым законом распределения вероятностей (оптимальная смешанная стратегия, в дальнейшем обозначаемая нами как ОСС). Если оба игрока придерживаются своих ОСС, то в игре наступает равновесие: отказ любой стороны от своей ОСС не может привести к увеличению среднего выигрыша «нарушителя равновесия». Удивительным здесь является то, что игрок для обеспечения лучшего результата должен отказаться от сознательного выбора чистых стратегий в каждой игре, доверившись жребию! Как уже сказано, этот жребий должен соответствовать некоторому распределению вероятностей (его можно получить, решая задачу линейного программирования).

К сожалению, красивые математические идеи, подобные изложенной, остаются для большинства студентов скучными абстракциями, если не подкрепить их конкретными убедительными иллюстрациями. Студенческим командам можно предложить сыграть в игру с нулевой суммой (в этом случае выигрыш одной команды равен проигрышу другой), с известной платёжной матрицей. Для определённости рассмотрим матрицу выигрышей команды «А» в виде:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	1.2	5.2	-0.8	1.2	3.2
A_2	-4.8	-2.8	3.2	4.2	-1.8
A_3	-4.8	-0.8	-2.8	0.2	-3.8
A_4	4.2	3.2	-3.8	5.2	3.2

Итак, команда «А» имеет 4 «чистых» стратегии, а команда «В» – 5. Подготовка и проведение игры разбивается на 3 этапа.

Этап 1. До занятия (подготовка к игре)

1. В подготовке участвует 2 или более команд. Каждой из команд сообщается, какая роль («А» или «В») ей может достаться. Например, если к игре готовятся 4 команды, то 2 из них могут оказаться в роли «А», остальные 2 – в роли «В».

2. Сообщается, что игра должна состояться 50 раз. Поскольку последовательное повторение игр заняло бы слишком много времени, каждой команде предлагается сразу записать ряд из 50 выбранных стратегий. Например, для команды, которая будет выступать в роли «А» этот ряд может выглядеть так: $1 - A_2, 2 - A_4, 3 - A_2, \dots, 50 - A_1$.

4. Подготовленный ряд необходимо держать в строгом секрете от игроков других команд. В противном случае противник легко подберёт свои 50 стратегий так, чтобы в каждой игре получить наилучший для себя результат.

5. Командам запрещено использовать какую-то из своих стратегий как единственную или «почти единственную» (скажем, в 90 или более процентах игр). Дело в том, что в условиях реальной игры противник, заметив, что вы почти всегда применяете одну и ту же стратегию, легко найдёт оптимальный ответ на неё.

6. При определении своего ряда стратегий команды пользуются теми знаниями и навыками, которые получены ими к моменту игры. Они уже должны быть знакомы с возможностью решения матричной игры в смешанных стратегиях как двойственной задачи линейного программирования и способами реализации своей ОСС. Однако они имеют право пренебречь теорией игр и действовать согласно собственным соображениям или интуиции. Одна из целей занятия как раз и состоит в том, чтобы выяснить, к чему это приведёт.

Этап 2. Игра

1. В начале занятия преподаватель определяет 2 команды для участия в игре.
2. Команды раскрывают подготовленные ими ряды стратегий.
3. На доске выписывается таблица, в которой (усилиями всей группы) определяется выигрыш игрока «А» в каждой из 50 игр. Например, таблица может выглядеть так:

Номер игры	Стратегии команд		Платёж команды «А»
1	A_2	B_3	3.2
2	A_4	B_3	-3.8
3	A_2	B_5	-1.8
...	...	...	...
50	A_1	B_1	1.2

4. Рассчитывается средний выигрыш игрока «А» во всей серии. Фактический результат игры, как правило, отражает ту работу, которую проделывают команды на этапе подготовки, хотя и не является строго детерминированным.

Этап 3. Анализ игры (под руководством преподавателя)

1. Определяются частоты, с которыми команды применили свои чистые стратегии. Считается, что тем самым они реализовали определённые смешанные стратегии. Например, если команда «А» применила стратегию A_1 40 раз и стратегию A_2 10 раз, то она реализовала смешанную стратегию (0.8, 0.2, 0, 0). Если команда «В» каждую из своих возможных стратегий применила по 10 раз, то она реализовала смешанную стратегию (0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2).

2. Рассчитывается математическое ожидание выигрыша игрока «А» при применении смешанных стратегиях. Для приведённого примера:

$$M(A) = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^5 P(A_i)P(B_j)a_{ij} = 1.52.$$

Здесь символ $P(\dots)$ обозначает вероятности определённых чистых стратегий в смешанных стратегиях команд, а a_{ij} – соответствующие выигрыши команды «А» (элементы платёжной матрицы).

3. Ищется объяснение тому факту, что фактический результат не совпал с ожидаемым (как правило, будет именно так). Для этого рассчитывается среднеквадратическое отклонение выигрыша команды «А», а затем среднеквадратическое отклонение среднего арифметического выигрыша команды «А» в 50 опытах. Для того же примера:

$$\sigma(A) = \left(\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^5 P(A_i) P(B_j) a_{ij}^2 - M^2(A) \right)^{1/2} = 2.588,$$

$$\sigma(\bar{A}) = \sigma(A) / \sqrt{50} = 0.366.$$

В силу центральной предельной теоремы средний выигрыш в 50 опытах имеет приблизительно нормальное распределение. Поэтому интервал, внутри которого должна оказаться эта величина, можно оценить по правилу «трёх сигма». Таким образом, можно подсчитать, что средний выигрыш команды «А» в 50 опытах должен находиться в пределах от 0.42 до 2.62.

Если применённые командами стратегии не являются оптимальными, преподаватель приводит ОСС. Получение ОСС в игре с нулевой суммой сводится к решению пары двойственных задач линейного программирования [1]. Соответствующая методика студентами должна быть уже освоена. О применении с этой целью надстройки «Поиск решения» табличного процессора Excel подробно рассказано в [2]. В нашей задаче: ОСС для команды «А» – (0.8, 0.2, 0, 0), ОСС для команды «В» – (0.4, 0, 0.6, 0, 0). Таким образом, в рассмотренном примере команда «А» играла свою ОСС, команда «В» – нет. Как показывают приведённые выше оценки, в данном случае выигрыш команды «А» практически неизбежен.

В заключение для ОСС рассчитывается математическое ожидание выигрыша команды «А». Оно в данном случае равно нулю. Таким образом, при применении своих ОСС команды находились бы в равных условиях.

Итак, при любом исходе игры демонстрируется, что фактический выигрыш включает две составляющие: (1) «стохастически детерминированную» [3], за счёт выбора смешанных стратегий; (2) случайную, за счёт реальных комбинаций чистых стратегий в каждой из 50 игр (элемент везения).

Таким образом, усвоение весьма сложных теоретических положений может быть подкреплено неформальным игровым подходом к организации занятий, на которых царит дух состязательности, азарта и результативного творчества.

Литература:

1. Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология. М. : Высшая школа, 2001. 208 с.
2. Гефан Г.Д. Экономико-математические методы и модели. Курс математики, ориентированный на использование компьютера. Часть 1. Некоторые методы исследования операций: учебное пособие. Иркутск : ИрГУПС, 2010. 208 с.
3. Гефан Г.Д. Теория вероятностей и математическая статистика: историко-философские аспекты в преподавании дисциплины // Омский научный вестник. 2015. № 1 (135). С.123-126.