Распарин В.Н.
МАОУ «Гимназия №1 Октябрьского района г. Саратова»
Саратов, Россия

doi: 10.18411/lj2016-3-95

Об одном исследовательском проекте

Если нарисовать правильный пятиугольник – пентагон (от греч. pentagōnon), и в нем провести все диагонали, то получим пятиконечную звезду, называемую пентаграммой или пентаклем. Название пентаграмма происходит от греческого слова pentagrammon (pente – пять, grammon – линия) и означает правильный пятиугольник, на сторонах которого построены равнобедренные треугольники одинаковой высоты.

Из «Начал» Евклида пришла задача о делении отрезка в крайнем и среднем отношении. Суть задачи в следующем.

Из «Начал» Евклида пришла задача о делении отрезка в крайнем и среднем отношении. Суть задачи в следующем.

Разделим отрезок АВ точкой С в таком отношении, чтобы меньшая часть его относилась к большей, как большая часть отрезка относится к отрезку АВ, то

есть $\frac{AC}{CB} = \frac{CB}{AB}$

или, что то же самое:

$$\frac{AB}{CB} = \frac{CB}{AC}.$$

Обозначим каждое из двух последних отношений через x . Тогда с учетом того, $AB = AC + CB$,

перепишем последнюю пропорцию в виде

$$x = \frac{AC + CB}{CB} = \frac{AC}{CB} + 1 = \frac{1}{\frac{CB}{AC}} + 1 = \frac{1}{x} + 1.$$

Откуда следует уравнение

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Ясно, что решением этого уравнения должно быть положительное число, следовательно, решением задачи о делении отрезка в крайнем и среднем отношении должно быть число

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Это число называется золотой пропорцией, а уравнение

$$x^2 - x - 1 = 0$$

или уравнение

$$x^2 = x + 1.$$

уравнением золотой пропорции. Приближенное значение числа

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

равно 1,6180339887498948482045868343656381177203...

Заметим, что на отрезке AB существует еще одна точка, D, которая также делит его золотым сечением

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{DB} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Точки пересечения диагоналей в пентагоне всегда являются точками «божественной пропорции». При этом образуется новый пентагон, в котором можно провести диагонали, их пересечение даст еще один пентагон и так до бесконечности. Таким образом, соотношение линейных сегментов в

пятиконечной звезде всегда равно золотой пропорции, которая обозначается буквой $\Phi(\phi)$ в честь выдающегося греческого скульптора Фидия (Phidias), который широко использовал ее в своих скульптурах.

Считается, что именно Леонардо да Винчи ввел термин «золотое сечение» (*aurea sectio*) и использовал пропорции этого сечения во многих своих знаменитых произведениях (в частности в «Тайной вечере» и «Моне Лизе»). Это удивительное число стало эстетическим каноном древнегреческого искусства и искусства Возрождения. Однако существует мнение, что термин восходит к Клавдию Птолемею – великому античному астроному и географу. Но термин стал популярным и закрепился в науке благодаря Леонарду да Винчи, то есть он стал поистине «кодом да Винчи».

Итак, пентагон и пентакл – один из самых могущественных образов, считавшийся во многих культурах одновременно божественным и магическим.

Учитывая упомянутое выше, традиционно своим учащимся я предлагаю задачи, связанные с пентагоном, пентаклем, с золотой пропорцией.

Так в 9 классе с целью осуществления проектно-исследовательской деятельности учащимся была предложена связка (дидактическая цепочка) задач:

В тупоугольном равнобедренном треугольнике ABC (AC – основание, $\angle A = 36^\circ$) проведена биссектриса AK . Найти отношение

$$S_{ACK} : S_{ABK}.$$

В равнобедренном треугольнике ABC с основанием

$$AC (\angle B = 36^\circ)$$

проведена биссектриса AK . Найти отношения

$$S_{ABK} : S_{ACK}.$$

На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC , один из острых

углов которого составляет 25% другого, взяты такие точки М и N, что треугольники ACN, CMN, BCM – равнобедренные. Найдите следующие отношения:

$$\text{а) } \frac{S_{AMC}}{S_{CMN}}; \quad \text{б) } \frac{S_{CMN}}{S_{CNB}};$$

$$\text{в) } S_{AMC} : S_{CMN} : S_{CNB}.$$

Геометрической основой предложенных задач явились так называемые «звездные» треугольники – треугольники составляющие пентаграмму.

треугольники поистине «звездные»! Углы в этих треугольниках $18^\circ, 36^\circ, 54^\circ, 72^\circ, 90^\circ, 108^\circ$ - составляют (кстати!) арифметическую прогрессию.

Решение задач основано на применении метода площадей, тесным образом (что очень важно) связано с тригонометрией и алгеброй. Показать, что полученные отношения равны

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

то есть являются золотой пропорцией – это только одна из целей предложенных исследовательских заданий. Другой же целью является вычисление точного значения $\sin 18^\circ$ разными способами, как результата решения конкретной математической модели возникшей геометрической ситуации, чтобы потом использовать полученные данные в решении задач на нахождение элементов треугольника.

Также полезно иметь ввиду, что получив значение $\sin 18^\circ$, можно

построить, к примеру, трисекцию углов $54^\circ, 108^\circ$, да и сам пентагон.

Рассмотрим решения предложенных задач.

Задача 1. В тупоугольном равнобедренном треугольнике ABC (AC – основание, $\angle A = 36^\circ$) проведена биссектриса AK . Найти отношение $S_{ACK} : S_{ABK}$.

Решение.

Очевидно, что $\angle B = 108^\circ$, $\angle A = 36^\circ$, $\angle C = 36^\circ$.

$$\frac{S_{ACK}}{S_{ABK}} = \frac{CK}{BK} = \frac{AC}{AB} = 2 \cdot \frac{\frac{1}{2}AC}{AB} = 2 \cos 36^\circ = 2 \sin 54^\circ.$$

Итак, $\cos 36^\circ = \sin 54^\circ$.

Для ответа на вопрос нужно найти значение $\cos 36^\circ$ или $\sin 54^\circ$. Пусть $18^\circ = \alpha$, тогда равенство $\cos 36^\circ = \sin 54^\circ$ примет вид: $\cos 2\alpha = \sin 3\alpha$.

Используя формулы синуса тройного угла и косинуса двойного угла, получим уравнение $4 \sin^3 \alpha - 2 \sin^2 \alpha - 3 \sin \alpha + 1 = 0$. Решая его, получим корни:

$$1, \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}, \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}.$$

Два первых значения $\sin \alpha$ не удовлетворяют условию задачи ввиду того, что $0 < \sin 18^\circ < 1$. Поэтому

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

Опять воспользовавшись формулой косинуса двойного угла, получим

значение выражения $2 \cos 36^\circ$. Оно равно

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

следовательно,

$$S_{ACK} : S_{ABK} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2},$$

а это золотая пропорция!

Задача 2. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC ($\angle B = 36^\circ$) проведена биссектриса АК. Найти отношение $S_{ABK} : S_{ACK}$.

Решение.

Из условия задачи следует, что $\angle ACK = 72^\circ$, $\angle CAK = 36^\circ$.

$$\frac{S_{ABK}}{S_{ACK}} = \frac{BK}{CK} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\frac{AC}{AB}} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2} \frac{AC}{AB}} = \frac{1}{2 \sin 18^\circ} = \frac{1}{2 \cos 72^\circ}.$$

Для ответа на вопрос нужно найти значение $\sin 18^\circ$.

Если иметь в виду то, что $18^\circ = \alpha$, тогда равенство $\cos 72^\circ = \sin 18^\circ$ примет вид: $\cos 4\alpha = \sin \alpha$. Применив формулы косинуса двойного угла и синуса двойного угла к выражению $\cos 4\alpha$, получим уравнение $1 - 8\sin^2 \alpha + 8\sin^4 \alpha = \sin \alpha$, то есть $8\sin^4 \alpha - 8\sin^2 \alpha - \sin \alpha + 1 = 0$.

Приведем его к виду $(\sin \alpha - 1) \cdot (8\sin^3 \alpha + 8\sin^2 \alpha - 1) = 0$.

В силу того, что $0 < \sin 18^\circ < 1$, значение $\sin \alpha = 1$ решением задачи не будет.

Уравнение $8\sin^3 \alpha + 8\sin^2 \alpha - 1 = 0$ решим используя замену $2\sin \alpha = t$.

Тогда уравнение $8\sin^3 \alpha + 8\sin^2 \alpha - 1 = 0$ будет выглядеть так:

$t^3 + 2t^2 - 1 = 0$. Разложив его левую часть на множители, получим:

$(t + 1) \cdot (t^2 + t - 1) = 0$. С учетом ограничений на переменную t получим,

что $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, а $\frac{1}{2\sin 18^\circ} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Ответ получен.

Замечание. Видимо проще значение $\sin 18^\circ$ получить из треугольника АКС.

Для этого проведем высоту АН в этом треугольнике.

$\angle CAH = 18^\circ$, $\angle ACH = 72^\circ$ и $\cos 18^\circ = \sin 72^\circ$. Далее поступаем так:

$$\cos 18^\circ = 2 \sin 36^\circ \cos 36^\circ, \cos 18^\circ = 4 \sin 18^\circ \cos 18^\circ (1 - 2 \sin^2 18^\circ),$$

$$1 = 4 \sin 18^\circ (1 - 2 \sin^2 18^\circ), 8 \sin^3 18^\circ - 4 \sin 18^\circ + 1 = 0. \text{ Введя обозначение}$$

$$2 \sin 18^\circ = x, \text{ найдем корни получившегося уравнения } x^3 - 2x + 1 = 0.$$

Учтем, что $0 < 2 \sin 18^\circ < 2 \sin 30^\circ = 1$. И опять получим значение $\sin 18^\circ$.

Задача 3. На гипотенузе АВ прямоугольного треугольника АВС, один из острых углов которого составляет 25% другого, взяты такие точки М и N, что треугольники АСN, СМN, ВСМ – равнобедренные. Найдите следующие

отношения: а) $\frac{S_{AMC}}{S_{CMN}}$; б) $\frac{S_{CMN}}{S_{CNB}}$; в) $S_{AMC} : S_{CMN} : S_{CNB}$.

Решение.

Ясно, что острые углы данного треугольника равны 18° и 72° .

Из условия задачи следует, что CM – медиана треугольника ABC. Введем

обозначения $BC = a, BN = b$. Тогда $MN = a, AM = a + b$ и
 $S_{AMC} : S_{CMN} : S_{CNB} = (a + b) : a : b$. (х)

Выразим b через a , используя треугольники ABC и CPB (CP – высота треугольника CNB).

$$\text{В } \triangle ABC \sin 18^\circ = \frac{a}{2(a+b)}, \text{ а в } \triangle CPB \sin 18^\circ = \frac{b}{2a}.$$

$$\text{Из этих двух равенств следует, что } \frac{a}{2(a+b)} = \frac{b}{2a}.$$

Далее в результате преобразований приходим к уравнению

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0$$

(а это уравнение золотой пропорции), положительным корнем которого является число

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2}, \text{ то есть } \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \text{ откуда } b = \frac{2a}{\sqrt{5}+1}.$$

Теперь преобразуем равенство (х).

$$\begin{aligned} S_{AMC} : S_{CMN} : S_{CNB} &= (a+b) : a : b = \left(a + \frac{2a}{\sqrt{5}+1}\right) : a : \frac{2a}{\sqrt{5}+1} = \\ &= \left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}+1}\right) : 1 : \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \left(1 + \frac{2(\sqrt{5}-1)}{4}\right) : 1 : \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} : 1 : \frac{2}{\sqrt{5}+1}. \end{aligned}$$

Ответ на вопрос в) получен. Ответим на вопросы а) и б).

$$\text{а) } \frac{S_{AMC}}{S_{CMN}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}. \quad \text{б) } \frac{S_{CMN}}{S_{CNB}} = \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{5}+1}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Из решения этой задачи можно сделать выводы о том, что:

1) точка М и точка N делят соответственно отрезки AN и BM в отношении золотой пропорции;

(для отрезка AN

$$: \frac{MN}{AM} = \frac{AM}{AN}, \frac{a}{a+b} = \frac{a+b}{2a+b}. \Rightarrow a^2 - ab - b^2 = 0.$$

для отрезка BM:

$$\frac{BN}{MN} = \frac{MN}{BM}, \frac{b}{a} = \frac{a}{a+b}. \Rightarrow a^2 - ab - b^2 = 0.)$$

2) отношения $\frac{S_{AMC}}{S_{CMN}}$ и $\frac{S_{CMN}}{S_{CNB}}$ равны золотой пропорции;

3) учитывая соотношение между величинами a и b , полученное в ходе решения, можно теперь уже иным способом вычислить значение $\sin 18^\circ$.

$$(\sin 18^\circ = \frac{b}{2a} = \frac{2a}{\sqrt{5}+1} : (2a) = \frac{1}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.)$$

4) зная значение $\sin 18^\circ$, можно с помощью циркуля и линейки построить трисекции углов $54^\circ, 108^\circ$, разделить прямой угол на пять равных углов, построить пентаграмму.

Важно, наконец, по окончании проекта, «помочь сделать учащимся открытие» того, что рассматриваемые треугольники являются элементами, составляющими пентаграмму.

Литература:

1. Васютинский Н.А. Золотая пропорция. М., 1990.
2. Волошинов А.В. Математика и искусство. М., 1992.
3. Воробьёв Н.Н. Числа Фибоначчи. М., 1992.
4. Ковалёв Ф.В. Золотое сечение в живописи. Киев, 1989.
5. Стахов А.П. Коды золотой пропорции. М., 1984.
6. Шевелёв И.Ш. Золотое сечение. М., 1990.