¹Булыжев Е.М., ²Меньшов Е.Н.

¹ЗАО «Системы водоочистки»

² УлГТУ

Ульяновск, Россия

doi: 10.18411/lj2015-12-12

К вопросу моделирования дисперсного распределения агрегации ферромагнитных частиц

Агрегация частиц играет решающую роль в неожиданном успехе магнитной сепарации для тонкодисперсных ферромагнитных частиц. Это предположение основано на экспериментальных результатах, в которых при приложении магнитного поля наблюдаются объединения частиц в устойчивые нитеобразные агрегаты [1]. Однако механизм такого явления до конца не понят. При этом современная теория магнитной коагуляции в основном нацелена на изучение и моделирование динамики формирования цепочечных агрегатов и полностью игнорирует задачу моделирования дисперсного распределения ферромагнитных частиц при магнитной коагуляции в связи с ее сложностью.

Если обратиться к традиционной стохастической теории коагуляции, базирующейся на уравнениях Смолуховского, то она ставит цель определения эволюции во времени функции дисперсного распределения частиц взвеси исходя из простейших начальных распределений частиц. Математические модели, разработанные на основе этой теории, не только требуют больших вычислительных ресурсов, но и не универсальны – не решают задачу при произвольных начальных распределениях частиц по размерам.

Существенная анизотропия магнитных сил взаимодействия ферромагнитных частиц может служить причиной объединения их в цепочечные

агрегаты, ориентированные по направлениям магнитных линий [2]. Поскольку взаимное притяжение ферромагнитных частиц (агрегатов) происходит вдоль магнитных линий, то сближаться могут только лежащие на линиях поля соседние частицы (агрегаты), объединяясь в пары. Если массы соседних частиц (агрегатов) m_i и m_j , то результирующая масса объединенной пары равна $m_i + m_j$. При моделировании магнитной коагуляции положим допущение об исключительно парном объединении частиц (агрегатов) в каждом элементарном акте процесса коагуляции, которое является традиционным приближением при моделировании коагуляции [3].

Утверждение 1. Функцию плотности вероятности $f_k(m)$ распределения дисперсной фазы для магнитной коагуляции можно представить сверткой (1) функций плотности вероятности $f_n(m)$ распределения дисперсной фазы до коагуляции и весовой функции $g(x)$, являющейся характеристикой процесса магнитной коагуляции, при условии, что функции $g(m)$ и $f_n(m)$ непрерывны:

$$f_k(m) = \int_0^m f_n(\eta)g(m - \eta)d\eta. \quad (1)$$

Утверждение 2. Стохастический процесс магнитная коагуляция – характеризуется двумя независимыми случайными величинами $\xi_1(m)$ и $\xi_2(m)$.

Доказательство. Пусть на вход процесса магнитной коагуляции поступает дисперсная система с функцией распределения по массам $f_n(m)$ дисперсной фазы. Сначала покажем, что стохастический процесс – магнитная коагуляция – характеризуется двумя независимыми случайными величинами $\xi_1(m)$ и $\xi_2(m)$.

Случайная величина $\xi_1(m)$ обусловлена случайным порядком расположения, вдоль магнитных линий, ансамбля ферромагнитных частиц с различными, но с детерминированными массами. Тогда при парном объединении соседних частиц, например, частиц с массами m_i и m_j , случайной величиной $\xi_1(m)$ является количество пар с одинаковой бинарной массой $m = m_{i1} + m_{j1} = C_k = const$, какое обусловлено вариацией детерминированных масс m_{i1} и m_{j1} за счет случайного их размещения. Так как

пространственное размещение ферромагнитных частиц приводит к их объединению, то вероятностная характеристика размещения пар частиц вдоль магнитных линий может выступать характеристикой $g(x)$ процесса магнитной коагуляции.

Случайной величиной $\xi_2(m)$ является количество пар с одинаковой бинарной массой $m = m_{i2} + m_{j2} = C_k = const$, но при условии фиксированного пространственного расположения ферромагнитных частиц вдоль магнитных линий, при котором массы m_{i2} и m_{j2} феррочастиц варьируются случайным законом $f_{\text{и}}(m)$ их исходного распределения в дисперсной системе.

Случайные величины $\xi_1(m)$ и $\xi_2(m)$ не зависят друг от друга по следующим причинам. Первая связана со случайным пространственным размещением различных, но детерминированных по массе частиц. Вторая связана со случайным исходным распределением количества частиц по их массам в дисперсионной среде. Поэтому при объединении частиц (агрегатов) число пар с массой $m_i + m_j$ будет состоять из числа пар $m_{i1} + m_{j1} = const$, обусловленных пространственным размещением частиц (агрегатов), и числа пар $m_{i2} + m_{j2} = const$, обусловленных исходным распределением частиц по их массам.

Следовательно, процесс коагуляции характеризуется суммой двух независимых непрерывных случайных величин $\xi_1(m) + \xi_2(m)$.

Положим, что распределения случайных величин $\xi_1(m)$ и $\xi_2(m)$ задаются непрерывными функциями плотности вероятности $g(m)$ и $f_{\text{и}}(m)$ соответственно.

Согласно «формуле свертки» теории вероятностей [4], «если случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют абсолютно непрерывные распределения с плотностями $f_{\xi_1}(x_1)$ и $f_{\xi_2}(x_2)$, то плотность распределения суммы $\xi_1 + \xi_2$ равна свертке плотностей f_{ξ_1} и f_{ξ_2}

$$f_{\xi_1+\xi_2}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1}(u)f_{\xi_2}(t-u)du = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_2}(u)f_{\xi_1}(t-u)du»$$

Заменяя абстрактные переменные на физические $t = m$, $f_{\xi_1}(x_1) = g(m)$, $f_{\xi_2}(x_2) = f_{\text{и}}(m)$, $f_{\xi_1+\xi_2}(t) = f_{\text{к}}(m)$ и учитывая физическое условие положительности массы $m \geq 0$, т.е. носители функций $g(m)$ и $f_{\text{и}}(m)$ ($\text{supp } g(m)$ и $\text{supp } f_{\text{и}}(m)$, $m \in R$) содержатся в интервале $[0, \infty]$, приходим к (1).

Таким образом, утверждение 1 доказано.

Вывод. 1. Свертка (1) является обобщенной математической моделью преобразования дисперсного распределения взвеси ферромагнитных частиц в дисперсионной среде при произвольной непрерывной функции $f_{\text{и}}(x)$ исходного дисперсного распределения. 2. Для реализации весовой функции системы достаточно определить частную вероятностную функцию распределения дисперсной фазы при простейших тестовых воздействиях. Например, простейшим тестовым воздействием является равновероятностное распределение ансамбля дискретных ферромагнитных частиц [2].

Литература:

1. Dullens R. Water purification by magnetic separate [Электронный ресурс]/ R. Dullens, S. Tsai. – 2013 – Режим доступа: <https://www0.maths.ox.ac.uk/groups/occam/research/resources-energy-and-environment/ree11-2>.
2. Булыжев Е.М., Меньшов Е.Н. Математическая теория магнитной коагуляции ферромагнитных частиц в слабозагрязненных сточных водах // Известия Самарского научного центра Российской академии наук . – 2014. – Т 16. – №1. – С. 247-254.
3. Волков В.А. Коллоидная химия (Поверхностные явления и дисперсные системы) / В.А. Волков.–М.: МГТУ им. А.Н.Косыгина, 2001.– 640 с.
4. Чернова Н.И. Теория вероятностей / Н.И. Чернова. – Новосибирск: СГУТИ, 2009. – 139 с.