Томашевский С. В.

Московский государственный технический университет радиотехники, электроники и автоматики

Россия, г. Москва

DOI: 10.18411/lj2015-10-33-36

Доказательство разрешимости оптимизационной задачи в информационной модели управления кафедрой

Динамика развития кафедры как учебной структуры, показывает, что кафедра нуждается в современной и достаточно сложной системе управления. В работе [1] приводится обоснование необходимости введения для учебной кафедры технического университета (УКТУ) автоматизированной системы поддержки управления.

Для надлежащей работы кафедры необходимо четкое представление выделяемых ресурсов по каждой ожидаемой задаче. Причем многие задачи будут взаимосвязанными, а потому будет присутствовать корреляция между затраченными на них ресурсами, а порою они будут взаимодополняющими, в результате чего будет проявляться эффект диверсификации. Стоит учесть, что в начале года нет, и не может быть четкого, полного списка задач для кафедры – существует высокая вероятность, что произойдут различные изменения. Поэтому задача прогнозирования распределения ресурсов отнюдь не является простой, она должна учитывать дополнительные вероятные факторы нагрузки и будет являться сложно-ситуационной задачей. Из-за сложного характера взаимосвязей между задачами УКТУ, нет возможности провести линейную оценку каждой составляющей, а затем линейно вычислить общий итог через

ассоциативность входящих компонент – необходимо учитывать все внутренние взаимосвязи и пользоваться нелинейным моделированием.

Для прогнозирования необходимых кафедре ресурсов необходимо точно представить всю систему работы кафедры, имеющиеся у нее ресурсы, ее взаимодействия с другими кафедрами, ее примерные задачи на ближайший год. При помощи математических и логических связей все входные параметры могут быть учтены в одной управляющей функции. Для упрощения составления этой функции все входные параметры стоит разбить на несколько блоков (обоснованность указывается в работе [2]). Этими основными блоками будут являться:

- Финансовый блок (F)
- Нормативный блок (N)
- Оборудование (O)
- Персонал (P)
- Обучаемые студенты (S)

В каждом из этих блоков необходимо провести более мелкий кластерный анализ для выявления всех существенных переменных этого блока и их зависимостей с другими блоками. Тогда задача по оценке эффективности работы кафедры будет сводиться к рассмотрению функционала вида:

$$E = E(F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots), N(\beta_1, \beta_2, \dots), O(\gamma_1, \gamma_2, \dots), P(\delta_1, \delta_2, \dots), S(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots)) \quad (1)$$

Основной трудностью при оценке такого функционала является динамичность всех данных и их неявная взаимосвязь между собой. Если не будет достоверных данных и обоснованно выведенных взаимосвязей между разными блоками, а также между входящими в их состав элементами, то даже при корректной оценке самих блоков по-отдельности, мы не сможем получить корректный результат по всей кафедре в целом. Для установления соответствий между блоками можно прибегнуть к введению корреляционной матрицы, значения которой будут рассчитываться на основании имеющейся статистики и экспертных оценок. Очевидно, что при таком подходе, никакие входящие

данные не будут являться статичными, константными, а все будут выражаться конкретными функциями.

Межблочная корреляция будет отражать эффект диверсификации между выбранными блоками, что позволит не учитывать дважды одни и те же показатели сразу в нескольких блоках, а также позволит ввести зависимости риска для смежных межблочных задач.

При попытке оценки максимальной эффективности кафедры уже возникает оптимизационная задача, целью которой является нахождение наилучшего (с точки зрения какого-то критерия, далеко не единственного) распределения ожидаемых ресурсов. Сформулирована она может быть следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_f = \max\{E(F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots), N(\beta_1, \beta_2, \dots), O(\gamma_1, \gamma_2, \dots), P(\delta_1, \delta_2, \dots), S(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots))\}, \\ \text{для } i \in \{1, 2, \dots\} \begin{cases} a_i \leq \alpha_i \leq A_i, \\ b_i \leq \beta_i \leq B_i, \\ c_i \leq \gamma_i \leq C_i, \\ d_i \leq \delta_i \leq D_i, \\ e_i \leq \varepsilon_i \leq E_i. \end{cases} \end{array} \right. \quad (2)$$

Решаться она будет с помощью оптимальной модели методами математического программирования, то есть путем поиска максимума и минимума функций и функционалов при заданных ограничениях.

Проведем доказательство разрешимости построенного таким образом функционала. Для адекватности предположим наличие достаточных статистических данных и предварительно оценим адекватность самого построения модели с математической точки зрения. Подробное рассмотрение наполнения модели данными и получаемые результаты будут приводиться в дальнейших главах работы, уже после общего пояснения адекватности и востребованности.

С математической точки зрения стратегия разбиения на блоки полностью определяется функциями дележа риска. Пусть риск по взятому отделенному подмодулю описывается функцией $g(X)$. Учитывая ресурсные затраты на

другие задачи, пусть ресурсы, которые можно выделить под конкретно выбранный подмодуль будут обозначены $c_{re}(t) = c_{re}(g(X_t))$.

Ресурсы УКТУ в момент времени $t \geq 0$, с учетом возможных спонсорских поддержек, обозначим $R(t)$:

$$R_{re}^d(t+1) = R_{re}^d(t) - d(t) + c_{re}(t+1) - g(X_{t+1}),$$

где d – размер дивидендных выплат.

Резервы в начальный момент времени совпадают с начальными ресурсами: $R_{re}^d(0) = s$.

С практической точки зрения логично учесть дополнительные ограничения на вероятность невыполнения УКТУ своих взятых обязательств (чтобы минимизировать этот расчетный параметр в дальнейшей модели), рассматривая ее деятельность на конечном горизонте планирования T . Если момент такого разорения

$$\tau_{re}^d = \inf_{t \geq 0} (R_{re}^d(t) < 0),$$

то вероятность разорения

$$\varphi_{re}^d(s) = P(\tau_{re}^d \leq T).$$

Дополнительно ограничим вероятность разорения с помощью квантильного критерия Value-at-Risk, предварительно выбрав уровень доверительного интервала $\varphi_{re}^d(s) \leq \alpha$.

Мерой рентабельности будем считать суммарные дисконтированные дивидендные отчисления, проводимые согласно стратегии $d(t)$ к моменту времени T с учетом возможного покрытия спонсорской поддержкой, а также ограничениями на вероятность перехода в нерентабельное состояние:

$$T = \begin{cases} \tau_{re}^d, & \text{если } \tau_{re}^d \leq T \\ T, & \text{если } \tau_{re}^d > T \end{cases}$$

$$u(s, a) = E\left[\sum_{t=0}^{T-1} v^t d(t)\right] \rightarrow \max_{d(t), g(t), \tau_{re}^d \leq \alpha, 0 \leq \alpha \leq 1}. \quad [10]$$

Для решения поставленной оптимизационной задачи запишем уравнение Гамильтона-Якоби:

$$u(s, \alpha) = \sup_{\delta, \beta, g} \{ \delta + vE \left[u \left(s - \delta + c_{re}(g(X)) - g(X), \beta(g(x)) \right) \right] \}$$

при следующем наборе ограничений:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \delta \leq s, \\ E[\beta(g(X))] &\leq \alpha, \\ 0 &< g(X) \leq X. \end{aligned}$$

Тройка $(\delta^* = \delta^*(s, \alpha), \beta^*(x) = \beta^*(s, \alpha, x), g^*(x) = g^*(s, \alpha, x))$ является максимизатором в уравнении Гамильтона-Якоби и определяет решение поставленной оптимизационной задачи.

Для дальнейшего анализа решения поставленной оптимизационной задачи воспользуемся рекурсивным представлением функции

$$u_0(s, \alpha) = 0$$

$$u_{n+1}(s, \alpha) = \sup_{\delta, \beta, g} \{ \delta + vE \left[u_n \left(s - \delta + c_{re}(g(X)) - g(X), \beta(g(x)) \right) \right] \}$$

при ограничениях поставленной задачи.

В рамках выделенных рекурсивных обозначений при $n \geq 0, 0 < \alpha \leq 1, s \geq 0$:

$$u_n(s, \alpha) \leq u_{n+1}(s, \alpha) \leq s + \frac{cv}{1-v},$$

где c – изначальные ресурсы с учетом возможно одобренных спонсорских поддержек (и до выделения под другие задачи).

Доказательство проведем по индукции:

$$u_0(s, \alpha) \leq u_1(s, \alpha)$$

$$\begin{aligned} u_{n+1}(s, \alpha) &= \sup_{\delta, \beta, g} \left\{ \delta + vE \left[u_n \left(s - \delta + c_{re}(g(X)) - g(X), \beta(g(x)) \right) \right] \right\} \geq \\ &\geq \sup_{\delta, \beta, g} \left\{ \delta + vE \left[u_{n-1} \left(s - \delta + c_{re}(g(X)) - g(X), \beta(g(x)) \right) \right] \right\} = u_n(s, \alpha). \end{aligned}$$

$$\text{При } u_n(s, \alpha) \leq s + \frac{cv}{1-v}$$

$$\begin{aligned} u_{n+1}(s, \alpha) &= \sup_{\delta, \beta, g} \left\{ \delta + vE \left[u_n \left(s - \delta + c_{re}(g(X)) - g(X), \beta(g(x)) \right) \right] \right\} \leq \\ &\leq \sup_{\delta, g} \left\{ \delta + vE \left[s - \delta + c_{re}(g(X)) - g(X) + \frac{cv}{1-v} \right] \right\} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sup_g \left\{ s(1-v) + vs + \frac{cv}{1-v} + cv - vE[g(x)] \right\} \leq \\ &\leq s + \frac{cv^2}{1-v} + cv = s + \frac{cv}{1-v}. \end{aligned}$$

Тем самым мы доказали, что $u_n(s, \alpha)$ является неубывающей последовательностью функций, ограниченных сверху.

Докажем теперь, что существует единственное решение приведенного уравнения Гамильтона-Якоби.

Так как $u_n(s, \alpha)$ является неубывающей, ограниченной сверху последовательностью функций, то существует функция, являющаяся поточечным пределом для $u_n(s, \alpha)$:

$$\begin{aligned} &E \left[u_n \left(s - \delta + c_{re}(g(X)) - g(X), \beta(g(x)) \right) \right] \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \\ &\rightarrow_{n \rightarrow \infty} E \left[u \left(s - \delta + c_{re}(g(X)) - g(X), \beta(g(x)) \right) \right] \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} &u(s, \alpha) \geq u_{n+1}(s, \alpha) = \\ &= \sup_{\delta, \beta, g} \left\{ \delta + vE \left[u_n \left(s - \delta + c_{re}(g(X)) - g(X), \beta(g(x)) \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

С другой стороны, из $u_n(s, \alpha) \leq u(s, \alpha)$ следует, что

$$\begin{aligned} &\sup_{\delta, \beta, g} \left\{ \delta + vE \left[u \left(s - \delta + c_{re}(g(X)) - g(X), \beta(g(x)) \right) \right] \right\} \geq \\ &\geq \sup_{\delta, \beta, g} \left\{ \delta + vE \left[u_n \left(s - \delta + c_{re}(g(X)) - g(X), \beta(g(x)) \right) \right] \right\} = \\ &= u_{n+1}(s, \alpha) \geq u_n(s, \alpha) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} u(s, \alpha). \end{aligned}$$

Значит, $u(s, \alpha) = \sup_{\delta, \beta, g} \left\{ \delta + vE \left[u \left(s - \delta + c_{re}(g(X)) - g(X), \beta(g(x)) \right) \right] \right\}$.

Тем самым мы доказали разрешимость нашей оптимизационной задачи.

Список используемых источников информации

1. Адрианова Е. Г., Коваленко С.М. Разработка средств поддержки адаптации учебного процесса к требованиям профессиональных стандартов в области информационных технологий // VIII НПУ «Современные информационные технологии в управлении и образовании», Сборник научных трудов. Часть 3. М.: изд. «Проспект», 2009, С. 10-15.
2. Томашевский С.В. Инновационный подход в планировании управления // Международная научно-практическая конференция «EurasiaScience», НИЦ «Актуальность.РФ», 2015, С. 158-165.