Макаров М.В.

*Казанский (Приволжский) федеральный университет
Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ
Казань, Россия*

doi: 10.18411/lj-31-10-2016-2-07

idsp 000001:lj-31-10-2016-2-07

О решении геометрически нелинейных и линейных задач о поперечном изгибе жестко закрепленной трехслойной пластины с трансверсально-мягким наполнителем

Введение.

Интерес к композитным материалам вызван высоким уровнем их конструктивных свойств: прочности, жесткости и т. п. Для того, чтобы облегчить конструкцию, не уменьшив при этом ее несущую способность, используются тонкостенные элементы в виде оболочек. Такие оболочки широко распространены в инженерных сооружениях, машиностроении, судостроении, в авиационной промышленности и ракетной технике [1–5].

Рис. 1. Трехслойная пластина с трансверсально-мягким наполнителем (1 – подкрепляющая несущие слои диафрагма; 2 – жесткий опорный элемент; 3 – наполнитель; 4 – внешние несущие слои)

В настоящей работе изучаются геометрически линейная и нелинейная задачи о поперечном изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким наполнителем (см. рис. 1а), схема нагружения и закрепления которой показана на рис. 1б. Построены конечно-разностные аппроксимации задач. Численная

реализация разностной схемы в нелинейном случае осуществляется с помощью двухслойного итерационного метода. В среде Matlab разработаны комплексы программ для реализации приближенных методов, проведены численные эксперименты для модельных геометрически линейных и нелинейных задач. Проведен анализ полученных результатов. Ранее подобная задача изучалась в случае жесткого закрепления несущих слоев при отсутствии диафрагм [6-8]. В работах [9-16] изучены задачи об изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем в геометрически линейной и физически нелинейной постановке. Отметим, что физически нелинейные задачи теории мягких сетчатых оболочек исследованы в [17–25].

1. Постановки задач.

Изучаются задачи об изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем. Для описания напряженно-деформированного состояния в несущих слоях используются уравнения модели Кирхгофа-Лява, в заполнителе – уравнения теории упругости, упрощенные в рамках принятой модели трансверсально-мягкого слоя и проинтегрированных по толщине с удовлетворением условий сопряжения слоев по перемещениям [26–28]. Ширина пластины равна a , толщина заполнителя составляет $2t$, толщины несущих слоев равны $2t_{(k)}$, где k – номер слоя. Исследование процессов деформирования таких элементов диктуется прежде всего необходимостью определения степени их пригодности для дальнейшего использования. В соответствии с [26–28] введем обозначения: $H_{(k)} = t + t_{(k)}$ (здесь и всюду в дальнейшем предполагаем, что $k = 1, 2$), $X_{(k)}^1, X_{(k)}^3$ – компоненты поверхностной нагрузки, приведенной к срединной поверхности k -го слоя, $w^{(k)}$ и $u^{(k)}$ – прогибы и осевые перемещения точек срединной поверхности k -го слоя соответственно, q^1 – касательные напряжения в заполнителе, $T_{(k)}^{11}, M_{(k)}^{11}$ – мембранные усилия и внутренние изгибающие моменты в k -м слое соответственно, $c_3 = E_3 / (2h)$, $M_{(k)}^1$ – компоненты вектора поверхностных моментов k -го слоя.. $M_{(k)}^{11} = D_{(k)} d^2 u^{(k)} / dx^2$, где $D_{(k)} = B_{(k)} h_{(k)}^2 / 3$ – изгибная жесткость k -го

слоя, $B_{(k)} = 2h_{(k)} E^{(k)} / (1 - \nu_{12}^{(k)})(1 - \nu_{21}^{(k)})$ – жесткость k -го слоя на растяжение–сжатие, $E^{(k)}$ и $\nu_{12}^{(k)}$, $\nu_{21}^{(k)}$ – модуль упругости первого рода и коэффициенты Пуассона материала k -го несущего слоя, $S_{(k)}^1 = Q_{(k)}^1 + H_{(k)} q^1$ – обобщенные перерезывающие силы в k -м слое, $Q_{(k)}^1 = dM_{(k)}^{11} / dx + T_{(k)}^{11} dw^{(k)} / dx + M_{(k)}^1$ – перерезывающие силы в k -м несущем слое. Будем рассматривать задачу как в геометрически нелинейной постановке:

$$T_{(k)}^{11} = B_{(k)} \left(du^{(k)} / dx + \frac{1}{2} (dw^{(k)} / dx)^2 \right), \quad (1)$$

так и в геометрически линейной постановке:

$$T_{(k)}^{11} = B_{(k)} du^{(k)} / dx. \quad (2)$$

Задача о равновесии трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем в одномерной геометрически нелинейной постановке описывается следующей системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dT_{(k)}^{11}}{dx} + X_{(k)}^1 + (3 - 2k)q^1 = 0, & 0 < x < a, \\ \frac{dS_{(k)}^1}{dx} + c_3(3 - 2k)(w^{(2)} - w^{(1)}) + X_{(k)}^3 = 0, & 0 < x < a, \\ u^{(1)} - u^{(2)} - H_{(1)} \frac{dw^{(1)}}{dx} - H_{(2)} \frac{dw^{(2)}}{dx} + \frac{2t}{G_{13}} q^1 - \frac{2t^3}{3E_3} \frac{d^2 q^1}{dx^2} = 0, & 0 < x < a, \end{cases} \quad (3)$$

Предполагаем, что в правом торцевом сечении края несущих слоев жестко защемлены и отсутствует адгезионное соединение заполнителя с опорным элементом, на левом торцевом сечении края несущих слоев пластины шарнирно оперты на абсолютно жесткие в поперечном направлении диафрагмы, склеенной с торцевым сечением заполнителя:

$$T_{(k)}^{11}(0) = 0, \quad w^{(k)}(0) = d^2 w^{(k)}(0) / dx^2 = 0, \quad k = 1, 2, \quad dq^1(0) / dx = 0, \quad (4)$$

$$u^{(k)}(a) = 0, \quad w^{(k)}(a) = dw^{(k)}(a) / dx = 0, \quad k = 1, 2, \quad q^1(a) = 0. \quad (5)$$

Пусть $U = (w^{(1)}, w^{(2)}, u^{(1)} w^{(2)})$ – вектор перемещений точек срединной поверхности k -го слоя. Обобщенные постановки задач (1), (3)–(5) и (2)–(5) формулируется в виде интегральных тождеств относительно функций U и q^1 из пространств Соболева.

2. Приближенные методы решения и численные эксперименты.

Приближенные методы решения изучаемых задач основаны на их конечно-разностной аппроксимациях, в нелинейном случае для ее реализации используется двухслойный итерационный процесс, при этом разностная схема имеет вид $(A_1 + A_2)U = F$, A_1 – линейный оператор, A_2 – нелинейный [6, 7]. Двухслойный итерационный процесс ([6, 7, 29–34], см. также [35–40]) имеет вид $A_1(U^{(n+1)} - U^{(n)})/\tau + (A_1 + A_2)U^{(n)} = F$, $U^{(0)}$ – начальное приближение, $\tau > 0$ – итерационный параметр. В линейном случае проводится непосредственное решение соответствующих систем линейных алгебраических уравнений. Для модельных задач проведены численные эксперименты при следующих значениях параметров: $a = 20$ см, $t_1 = t_2 = 0.05$ см, $t = 1$ см, $G_{13} = 25$ МПа, $E_3 = 50$ МПа, $X_{(2)}^3 = 0$, $E^{(k)} = 133 \cdot 10^3$ МПа, $\nu_{12}^{(k)} = \nu_{21}^{(k)} = 0.3$, $X_{(k)}^1 = 0$, $M_{(k)}^1 = 0$, $k = 1, 2$, $U^{(0)} = 0$. Число точек сетки $N = 500$. Поперечная нагрузка полагалась равной $X_{(1)}^3 = 0.1$ МПа (рис. 2, 3, 6) и $X_{(1)}^3 = 1$ МПа (рис. 4, 5, 7). При малых нагрузках нелинейность проявляется очень слабо (осевые перемещения в линейном и нелинейном случаях почти совпали).

Рис. 2. Осевые перемещения
линейный случай, $X_{(1)}^3 = 0.1$ МПа

Рис. 3. Осевые перемещения
нелинейный случай, $X_{(1)}^3 = 0.1$ МПа

Рис. 4. Осевые перемещения,
линейный случай, $X_{(1)}^3 = 1$ МПа

Рис. 5. Осевые перемещения
нелинейный случай $X_{(1)}^3 = 1$ МПа

Рис. 6. Касательные напряжения в
заполнителе, $X_{(1)}^3 = 0.1$ МПа

Рис. 7. Касательные напряжения в
заполнителе, $X_{(1)}^3 = 1$ МПа

При больших значениях нагрузки сказывается нелинейность – появляются значительные прогибы, поэтому перемещения каждой точки несущего слоя, который подвергнут растяжению и ещё изгибается, что и характеризует его перемещения с положительным знаком. Остальные характеристики практически совпадают, независимо от величины нагрузки (на рис. 6, 7 приведены значения касательных напряжений в заполнителе).

3. Заключение.

Проведено численное исследование геометрически линейной и нелинейной задач о поперечном изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем. Это позволит в дальнейшем исследовать формы потери устойчивости пластины [41–45] на основе метода продолжения по параметру. Исследование корректности постановки можно провести по аналогии с [46–53].

Литература

1. Коршаков А.В. Обзор некоторых методов реконструкции томографических изображений. //Контроль. Диагностика. – М.: Машиностроение.-№3(105) 2007.-с. 45-49
2. Бейтс Р., Мак-Доннелл М. Восстановление и реконструкция изображений: Пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 336 с.
3. Чичигин Б.А., Кеткович А.А., Чернов Л.А. Современные лазерные системы контроля геометрии сложных поверхностей //Тезисы докладов семнадцатой российской НТК с международным участием «Неразрушающий контроль и диагностика», Екатеринбург, ИМАШ, УрО РАН, 2005–с. 168.
4. Будадин О.Н., Бекаревич А.А., Морозова Т.Ю. Математическое моделирование процесса теплового контроля локальных дефектов металлических изделий сложной формы на примере лопаток турбин газотрубных двигателей В мире научных открытий. №8(68), Красноярск, 2015, с. 34-43.
5. Будадин О.Н., Бекаревич А.А., Морозова Т.Ю. Тепловой автоматизированный контроль качества и диагностики технического состояния лопаток турбин газотурбинных агрегатов с оценкой надежности эксплуатации. М.: Спектр, 2014, 382 с.