РАЗДЕЛ XI. ФИЗИКА

Омаркулов К.А, Акимбеков Е.Т.

Моделирование одного класса динамических систем

Казахский агротехнический университет имени С.Сейфуллина

(Республика Казахстан, Астана)

doi: 10.18411/lj-31-08-2017-36

idsp: 000001:lj-31-08-2017-36

Аннотация

В данной статье рассматривается один класс динамических систем при постоянно действующих возмущениях и интегрирования дифференциальных уравнений Гамильтона-Якоби.

Ключевые слова: уравнения Гамильтона-Якоби, случай интегрируемости, постоянные интегрирования.

Ниже рассмотрим один класс динамических систем при постоянно действующих возмущениях (пертурбационной функцией). В связи с этим представляет интерес интегрирование дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и приводится к нахождению полного интеграла уравнения Гамильтона-Якоби [1]:

$$R = \mu W(q_i, q, \mu) (i=1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

где μ – малый параметр, а W – голомофная функция обобщенных координат, скоростей и параметра.

Далее рассмотрим один класс динамических систем, для которых можно указать полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби.

Теорема 1. Если гамильтониан системы определяется формулой

$$H = \frac{1}{2} \gamma(t) \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i(q_i)} \left(p_i - \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \right) - \sigma \Phi - \frac{\gamma(t)}{b} \sum_{i=1}^n U_i(q_i) + \frac{\gamma(t)}{b} \sum_{i=1}^n W_i(q_i, q, \mu) + \Phi_0(t) \quad (2)$$

$$\text{в которой } b = \sum_{i=1}^n b(q_i), \quad \Phi = b^{-1} \sum_{i=1}^n \Phi(q_i), \quad \gamma(t) = \frac{\gamma_0}{\sqrt{1+\beta t}} \quad (3)$$

$$\text{и } \sigma(t) = \phi - c\gamma(t) \quad (4)$$

где a_i, U_i, Φ_i, W_i – произвольные функции своих аргументов, γ, φ, σ – непрерывные функции времени, μ – малый параметр, что уравнение Гамильтона-Якоби обладает полным интегралом.

$$V = \varphi(t) \Phi - \int (h\gamma(t) - \Phi_0) dt + \sum_{i=1}^n \int \sqrt{2a_i(U_i + hb_i - c\Phi_i + \mu W_i + a_i)} dq_i \quad (5)$$

Где $h a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ – совокупность произвольных постоянных, причем $\sum_{i=1}^n a_i = 0$ (6)

Доказательство:

Решения уравнения:

$$\frac{\gamma}{b} \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2a_i} \left(\frac{\partial V}{\partial q_i} - \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \right) - U_i - \mu W_i \right] - \sigma(t) \Phi + \Phi_0 + \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (7)$$

$$\text{Ищем в виде } V = \varphi(t) \Phi(q_1, q_2, \dots, q_n) + S(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \quad (8)$$

$$\text{Имеем } \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2a_i} \left(\frac{\partial S}{\partial q_i} - U_i - \mu W_i \right) - \sigma(t) \Phi + \Phi_0 + \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \right] \quad (9)$$

В силу выражений (3), (4) уравнение (9) имеет вид:

$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2a_i} \left(\frac{\partial S}{\partial q_i} \right) - U_i + c \Phi_i - \mu W_i \right] + \frac{b}{\gamma(t)} \left(\Phi_0 + \frac{\partial S}{\partial t} \right) = 0 \quad (10)$$

$$\text{С помощью подстановки } s = -h \int \gamma(t) dt - \int \Phi_0 dt + F(q_1, q_2, \dots, q_n), \quad (11)$$

где h -произвольная постоянная, приходим к уравнению

$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2a_i} \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \right) - U_i + c \Phi_i - \mu W_i - h b_i \right] = 0, \quad (12)$$

имеющему решение в виде

$$F = \sum_{i=1}^n \int \sqrt{2a_i (U_i + h b_i + \mu W_i + a_i)} dq_i, \quad (13)$$

Здесь постоянные $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ удовлетворяют условию (6).

В результате имеем полный интеграл (5) уравнения (7) и теорема доказана.

Следствие 1. Если в формуле (2) $\mu = 0$, то получаем случай Бекова А.А. [1]

Следствие 2. Пологая в формуле (4) $c=0$, приходим к теореме Омарова Т.Б. и Бекова А.А. [3].

Следствие 3. Пологая в формуле (3) $\Phi=0$, получаем случай интегрируемости Яров-Ярового [4]. Если к тому же $\gamma=\text{const}$ $\Phi_0=0$, то приходим к теореме Лиувилля [5].

1. Огородников К.Ф. «Динамика звездных систем» Москва. 1958 г. с.638.
2. Бекова А.А. «Интегрируемые случаи уравнения Гамильтона-Якоби и ограниченная прямолинейная задача трех переменных массы». АЖ. т.64. вып.4. 1987 г. с.850-859
3. Беков А.А. Омаров Т.Б. «Интегрируемые случаи уравнения Гамильтона-Якоби» и некоторые нестационарные задачи небесной механики» АЖ. 1978 г. т.55. с.635-644.
4. Яров-Яровой М.С. «Об интегрировании уравнения Гамильтона-Якоби методом разделения переменных». П.М.М., 1963 г. т.27. вып. 6. с.973-987.
5. Дубошин Г.Н «Небесная механика, Основные задачи и методы» М.Наука 1975 г. с.799