Самой многочисленной группой фракталов является группа алгебраических фракталов. Существуют разные методы их получения, одним из этих методов является многократный (итерационный) расчёт функции вида $Z_{n+1}=f(z_n)$, где Z – комплексное число, f – какая-то функция. Вычисление данной функции выполняется до выполнения какого-то условия. Примером такого вида фракталов является множество Мандельброта (рис.2)

Рисунок 2 – множество Мандельброта

В заключении хочется отметить, что в настоящее время фракталы только набирают популярность и огромное развитие.

1. В.Е. Васильев. Компьютерная графика. Санкт-Петербург, 2005.
2. Бенуа Мандельброт. Фрактальная геометрия природы. Москва, 2002.

Чебакова В.Ю., Соловьев П.С., Фадеева М.С.

Математическая модель тлеющего разряда

*Казанский (Приволжский) федеральный университет
(Россия, Казань)*

doi:10.18411/lj-31-03-2018-03

idsp: 000001:lj-31-03-2018-03

Аннотация

Построена модель тлеющего разряда постоянного тока, учитывающая наличие молекулярных ионов и димеров аргона, а также зависимость констант скоростей процессов плазмо-химических реакций от неравномерного распределения газовой температуры в межэлектродном пространстве..

Ключевые слова. математическое моделирование, низкотемпературная плазма, тлеющий разряд, молекулярный ион, димер аргона, уравнение баланса.

Введение.

Низкотемпературная плазма (НТП) применяется в качестве рабочего тела в системах преобразования тепловой энергии в электрическую; создание устройств, генераторов плазмы, в которых электрическая дуга используется для создания

плазменных струй, в качестве активной среды в плазменно-энергетических технологиях обработки топлив. НТП используется для получения дисперсных материалов, обработки порошков и получения покрытий, модификации поверхностей полимерных материалов; использование плазмы для решения различных задач прикладной химии (плазмохимии); применение низкотемпературной плазмы в экологии [1–8]. Электрические разряды, характеризующиеся сравнительно малыми токами и вкладываемой мощностью разряда, называются тлеющими. Их самые разнообразные формы, отличаются частотой питающего разряд напряжения, размером и формой электродов и разрядного сосуда, составом и давлением газа. В настоящей статье речь идет о моделях тлеющего разряда (ТР) при постоянном токе. Дан краткий обзор имеющихся работ по моделированию тлеющего разряда. Затем построена математическая модель, которая в отличие от предложенных ранее позволяет учитывать наличие молекулярных ионов и димеров аргона, а также зависимость констант скоростей процессов плазмо-химических реакций от неравномерного распределения газовой температуры в межэлектродном пространстве.

1. Обзор работ по моделированию тлеющего разряда.

Дадим краткий обзор существующих моделей ТР. Рассмотрим эти модели по мере их усложнения. В [9] представлена модель ТР, в которой моделирование плоского разряда в азоте проводится в рамках диффузионно-дрейфового приближения. В уравнениях баланса заряженных частиц учитывается скорость внешней ионизации. В уравнении переноса электронов учитывается диффузия к боковой стенке. При постановке граничных условий считается, что вторичные электроны на катоде возникают за счет эмиссии электронов, у анода плазма предполагается квазинейтральной. Уравнения переноса дополняются уравнением Пуассона, со следующими граничными условиями: на катоде напряжение полагалось равным нулю, а на аноде – падению напряжения на разрядном промежутке. Граничные условия на боковых поверхностях обеспечивают условия непротекания ионного и электронного токов. В [10] приведены результаты численного моделирования ТР в азоте в двумерной постановке для широкого диапазона давлений и токов. Показано существование стационарных анодных пятен с нормальной плотностью тока. Проанализировано влияние диффузионных процессов на параметры анодного слоя. Приведенные результаты соответствуют модели с осесимметричной геометрией. Для более адекватного описания пространственных неоднородностей использована нестационарная модель разряда, учитывающая как поперечные, так и продольные составляющие диффузионных процессов. В качестве граничных условий на боковых поверхностях и оси симметрии в квазинейтральной плазме ставятся условия непротекания ионного и электронного токов. На аноде ставились условия равенства нулю напряжения, ионного потока на электрод и формирования электронного потока на анод за счет вторичной эмиссии. В положительном столбе предполагается выполненными условия равенства электронного и ионного потока, непрерывность ионной концентрации. В [11, 12] исследована корректность математической постановки системы нелинейных уравнений диффузионно-дрейфового приближения, широко используемой при моделировании газового разряда. Определен класс нелинейных граничных условий, обеспечивающих существование и единственность сильных решений. Так как концентрация метастабильных атомов в аргоне сопоставима с концентрацией заряженных частиц, то сверхупругие столкновения этих атомов с электронами приводят к изменению средней энергии и коэффициентов скоростей всех процессов под действием электронного удара [13–16]. В [17] использован следующий набор реакций для трехуровневой схемы термов атома аргона $\text{Ar} + e \rightarrow \text{Ar}^* + e$ – возбуждение метастабильного уровня;

$\text{Ar} + e \rightarrow \text{Ar}^+ + 2e$ – прямая ионизация с основного состояния; $\text{Ar}^* + e \rightarrow \text{Ar}^+ + 2e$ – ступенчатая ионизация с метастабильного уровня; $\text{Ar}^* + e \rightarrow \text{Ar}^{\Gamma} + e$ – перемешивание с метастабильного на резонансный уровень; $\text{Ar}^* + \text{Ar} \rightarrow 2\text{Ar}$, $\text{Ar}^* + 2\text{Ar} \rightarrow \text{Ar}_2 + \text{Ar}$, $\text{Ar}^* + e \rightarrow \text{Ar} + e$ – процессы девозбуждения метастабильного уровня. В [18] учтено также резонансное излучение с учетом самопоглощения $\text{Ar}^{\Gamma} \rightarrow \text{Ar} + \hbar\nu$. В [19] более подробно рассмотрено влияние резонансных атомов: $\text{Ar} + e \rightarrow \text{Ar}^{\Gamma} + e$, $\text{Ar}^{\Gamma} + e \rightarrow \text{Ar}^* + e$, $\text{Ar}^* + e \rightarrow \text{Ar}^{\Gamma} + e$, $\text{Ar}^{\Gamma} + e \rightarrow \text{Ar}^+ + 2e$, а также упругих соударений частиц, всего учтено 16 реакций. В [20] для аргона учитывались кинетические уравнения для ионов (Ar^+ , Ar^{2+}) и электронных возбужденных состояний аргона: суммарного метастабильного уровня, суммарного резонансного уровня и трех вышележащих уровней, всего учитывалось 26 реакций. В [21] определены абсолютные заселенности метастабильных состояний аргона в плазме высоко-частотного разряда (ВЧ) в атмосфере чистого аргона. В [22] приведена схема нижних электронных уровней аргона и обозначено уже 32 элементарных процесса. Программное обеспечение BOLSIG+ версия 1.2 [23] позволяет рассчитывать константы физических процессов для моделей сплошной среды с учетом их зависимости от приведенной напряженности электрического поля или электронной температуры.

2. Математическая модель тлеющего разряда.

Введем декартову систему координат $Oxyz$, направив ось абсцисс Ox перпендикулярно поверхности электродов. Обозначим через b расстояние между электродами, через a и d – ширину и длину прямоугольного электрода. Точка $x=0$ соответствует аноду, $x=b$ – катоду. Так как процессы, протекающие в плазме ТР постоянного тока, во многом схожи с плазмохимическими процессами ВЧ-емкостного (ВЧЕ) разряда и, следовательно, плазма ВЧЕ разряда во многом подобна плазме разряда постоянного тока, то в силу проведенного обзора работ для ТР и опыта по моделированию ВЧЕ-разряда, была по аналогии с [3, 24] построена модель ТР в локальном приближении, содержащая следующие уравнения.

1. Уравнение конвекции-диффузии для атомарных ионов.

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_+}{\partial t} + \frac{\partial(-D_+ \partial n_+ / \partial x + \mu_+ n_+ E)}{\partial x} + \frac{\partial(-D_+ \partial n_+ / \partial y)}{\partial y} + \frac{\partial(-D_+ \partial n_+ / \partial z)}{\partial z} = R_1 n_e N + \\ + R_2 n_m^2 + R_3 n_m n_e - R_4 n_e n_+ - R_5 n_e^2 n_+ + R_{12} n_e n_{2+} - R_{11} n_+ N^2 + R_{20} N n_{2+}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$0 \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq a, \quad 0 \leq z \leq d, \quad t > 0.$$

Здесь n_e , n_+ , n_{2+} , n_m – концентрации электронов, атомарных и молекулярных положительно заряженных ионов и метастабильных атомов аргона, N – концентрация атомов аргона в основном состоянии, μ_+ – подвижность атомарных ионов, D_+ – коэффициент диффузии атомарных ионов, $E = -\partial\varphi/\partial x$ – напряженность электрического поля, φ – потенциал электрического поля. В (1) и далее R_i , $i=1 \dots 20$, – коэффициенты скоростей плазмохимических реакций, приведенные в [3, 24].

В соответствии с [25] уравнение (1) дополним следующими граничными условиями:

$$G_+(0, y, z, t) = -v_+(0+, y, z, t), \quad G_+(b, y, z, t) = (v_+ + \mu_+ n_+ E)(b-, y, z, t),$$

$$G_+(x, 0, z, t) = -v_+(x, 0+, z, t), \quad G_+(x, a, z, t) = v_+(x, a-, z, t),$$

$$G_+(x, y, 0, t) = -v_+(x, y, 0+, t), \quad G_+(x, y, d, t) = -v_+(x, y, d-, t),$$

где G_+ – плотность потока атомарных ионов, $v_+ = n_+ \sqrt{8kT_a/(\pi m_+)}/4$ – средняя тепловая скорость атомарных тонов, m_+ – масса атомарного иона. Мы предполагаем равными температуры атомов T_a , атомарных ионов и возбужденных атомов.

2. Уравнение конвекции–диффузии для молекулярных ионов Ar_2^+

$$\frac{\partial n_{2+}}{\partial t} + \frac{\partial(-D_{2+} \partial n_{2+} / \partial x + \mu_{2+} n_{2+} E)}{\partial x} + \frac{\partial(-D_{2+} \partial n_{2+} / \partial y)}{\partial y} + \frac{\partial(-D_{2+} \partial n_{2+} / \partial z)}{\partial z} =$$

$$= R_{10} n_m^2 + R_{11} n_+ N^2 - R_{12} n_e n_{2+} - R_{13} n_e n_{2+} + R_{16} n_{2*}^2 + R_{17} n_m n_{2*} - R_{20} N n_{2+},$$

где μ_{2+} – подвижность молекулярных ионов, D_{2+} – коэффициент диффузии молекулярных ионов. Как и для уравнения конвекции–диффузии для атомарных ионов, граничные условия сформулируем в следующем виде.

$$G_{2+}(0, y, z, t) = -v_{2+}(0+, y, z, t), \quad G_{2+}(b, y, z, t) = (v_{2+} + \mu_{2+} n_{2+} E)(b-, y, z, t),$$

$$G_{2+}(x, 0, z, t) = -v_{2+}(x, 0+, z, t), \quad G_{2+}(x, a, z, t) = v_{2+}(x, a-, z, t),$$

$$G_{2+}(x, y, 0, t) = -v_{2+}(x, y, 0+, t), \quad G_{2+}(x, y, d, t) = -v_{2+}(x, y, d-, t),$$

где G_{2+} – плотность потока молекулярных ионов, $v_{2+} = n_{2+} \sqrt{8kT_a/(\pi m_{2+})}/4$ – средняя тепловая скорость молекулярных тонов, m_{2+} – масса молекулярного иона.

3. Уравнение конвекции–диффузии для электронного газа

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial(-D_e \partial n_e / \partial x + \mu_e n_e E)}{\partial x} + \frac{\partial(-D_e \partial n_e / \partial y)}{\partial y} + \frac{\partial(-D_e \partial n_e / \partial z)}{\partial z} = R_1 n_e N + R_2 n_m^2 +$$

$$+ R_3 n_m n_e - R_4 n_e n_+ - R_5 n_e^2 n_+ + R_{10} n_m^2 - R_{13} n_e n_{2+} + R_{16} n_{2*}^2 + R_{17} n_m n_{2*}, \quad 0 \leq x \leq b, \quad t > 0,$$

где n_{2*} – концентрация димеров аргона, $G_e = -D_e \partial n_e / \partial x - \mu_e n_e E$ – плотность потока электронов, μ_e – подвижность электронов, D_e – коэффициент диффузии электронов. Граничные условия выбираются в виде

$$G_e(0, y, z, t) = (-v_e - \mu_e n_e E)(0+, y, z, t),$$

$$G_e(b, y, z, t) = (v_e - \gamma(\mu_+ n_+ E + \mu_{2+} n_{2+} E))(b-, y, z, t), \quad G_e(x, 0, z, t) = -v_e(x, 0+, z, t),$$

$$G_e(x, a, z, t) = v_e(x, a-, z, t), \quad G_e(x, y, 0, t) = -v_e(x, y, 0+, t),$$

$$G_e(x, y, d, t) = -v_e(x, y, d-, t),$$

где $v_e = n_e \sqrt{8kT_e/(\pi m_e)}/4$ – средняя тепловая скорость электронов, γ – коэффициент вторичный электронной эмиссии с электродов, T_e – температура электронов, m_e – масса электрона. При нормальных условиях считается, что в газе содержится $\sim 10^4 \text{ см}^{-3}$ заряженных частиц. Это значение примем за начальные условия для полной концентрации заряженных положительных частиц и электронов.

4. Уравнения Пуассона для потенциала электрического поля

$$-(\partial^2 \varphi / \partial x^2 + \partial^2 \varphi / \partial y^2 + \partial^2 \varphi / \partial z^2) = q_e (n_+ + n_{2+} - n_e) / \varepsilon_0, \quad 0 \leq x \leq b, \quad t > 0$$

с граничными условиями

$$\varphi = -V_a \quad \text{на нагруженном электроде } (x = b),$$

$$\varphi = 0 \quad \text{на заземленном электроде } (x = 0),$$

$$\partial\varphi/\partial y(x, 0, z, t) = \partial\varphi/\partial y(x, a, z, t) = \partial\varphi/\partial z(x, y, 0, t) = \partial\varphi/\partial x(x, y, d, t).$$

Здесь q_e – заряд электрона, ε_0 – электрическая постоянная вакуума, V_a – амплитуда колебаний напряжения на нагруженном электроде.

5. Уравнение баланса концентрации метастабильных атомов

$$\frac{\partial n_m}{\partial t} - \frac{\partial(D_m \partial n_m / \partial z)}{\partial z} - \frac{\partial(D_m \partial n_m / \partial x)}{\partial x} - \frac{\partial(D_m \partial n_m / \partial y)}{\partial y} = R_6 N n_e + R_{18} n_e n_{2*} - R_2 n_m^2 - R_3 n_m n_e - R_7 n_m - R_8 N n_m - R_9 n_m n_e - R_{10} n_m^2 - R_{15} N^2 n_m - R_{17} n_m n_{2*} - R_{19} n_m N^2,$$

где D_m – коэффициент диффузии метастабильных атомов аргона. Граничные условия для данного уравнения имеют вид

$$G_m(0, y, z, t) = -v_m(0+, y, z, t), \quad G_m(b, y, z, t) = v_m(b-, y, z, t),$$

$$G_m(x, 0, z, t) = -v_m(x, 0+, z, t), \quad G_m(x, a, z, t) = v_m(x, a-, z, t),$$

$$G_m(x, y, 0, t) = -v_m(x, y, 0+, t), \quad G_m(x, y, d, t) = -v_m(x, y, d-, t),$$

где G_m – плотность потока метастабильных атомов, $v_m = n_m \sqrt{8kT_a / (\pi m_a)} / 4$ – средняя тепловая скорость электронов.

6. Кинетическое уравнение для концентрации димеров аргона Ar_2^*

$$\frac{\partial n_{2*}}{\partial t} = R_{19} n_m N^2 + R_{15} N^2 n_m - R_{14} n_{2*} - R_{16} n_{2*}^2 - R_{17} n_m n_{2*} - R_{18} n_e n_{2*}.$$

Начальные условия, выберем нулевыми, как и для метастабильных атомов: $n_{2*}(x, y, z, 0) = 0$.

7. Кинетическое уравнение для нейтральных атомов.

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -R_1 n_e N + R_2 n_m^2 + R_4 n_e n_+ + R_5 n_e^2 n_+ - R_6 N n_e + R_7 n_m + R_8 N n_m + R_9 n_m n_e - R_{11} n_+ N^2 + R_{12} n_e n_{2+} + R_{13} n_e n_{2+} + R_{14} n_{2*} - R_{15} N^2 n_m + R_{16} n_{2*} + R_{17} n_m n_{2*} + R_{19} n_m N^2$$

Начальные условия – следующие: $P/kT_a(x) = N(x, 0)$.

При проведении расчетов в качестве системы единиц необходимо выбирать систему СИ. Данные для аппроксимации коэффициента диффузии D_e , подвижности электронов μ_e , коэффициентов скоростей процессов прямой ионизации R_1 и возбуждения метастабилей R_6 , вклада, вносимого упругими соударениями в нагрев газа Q_{yn} , средней энергии $\bar{\varepsilon} = 3kT_e / 2$ необходимо определять с учетом зависимости от приведенной напряженности электрического поля с учетом электрон-электронных соударений с помощью пакета BOLSIG+ версия 1.2 [23].

4. Заключение.

Построена математическая модель, которая в отличие от предложенных ранее позволяет учитывать наличие молекулярных ионов и димеров аргона, а также зависимость констант скоростей процессов плазмо-химических реакций от неравномерного распределения газовой температуры в межэлектродном пространстве. Так как расчеты будут проводиться до выхода на стационарный режим, то для нахождения начального приближения будет использована стационарная модель положительного столба, сведенная к

задаче на собственные значения. При этом будет развита техника, предложенная в [26–32]. Будут разработаны приближенные методы решения указанной задачи на основе разработанных в [33–44] подходов.

1. Бадриев И.Б., Желтухин В.С., Чебакова В.Ю. О решении некоторых нелинейных краевых и начально-краевых задач // Материалы XXII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. – Москва: ООО "ТРП", 2016. – С. 31–33.
2. Абдуллин И.Ш., Желтухин В.С., Чебакова В.Ю., Шнейдер М.Н. Тематическая модель ВЧЕ-разряда в аргоне при больших межэлектродных расстояниях // Вестник Казанского технологического университета. – 2013. – Т. 16, № 22. – С. 334–338.
3. Чебакова В.Ю. Моделирование высокочастотного емкостного разряда при атмосферном давлении в аргоне // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2016. – Т. 158, № 3. – С. 404–423.
4. Badriev I.B., Chebakova V.Y., Zheltukhin V.S. Capacitive coupled RF discharge: modelling at the local statement of the problem // Journal of Physics: Conference Series. – 2017. – V. 789, № 1, art. 012004.
5. Zheltukhin V.S., Solov'yev P.S., Chebakova V.Y. Boundary conditions for electron balance equation in the stationary high-frequency induction discharges // Research Journal of Applied Sciences. – 2015. – V. 10, № 10. – P. 658–662.
6. Бадриев И.Б., Чебакова В.Ю. Математическое моделирование низкотемпературной ВЧЕ-плазмы в аргоне // Математическое моделирование и краевые задачи Труды десятой Всероссийской научной конференции с международным участием: в 3-х томах. – Самара, 2016. – С. 17–21.
7. Тихонова Н.В., Желтухин В.С., Чебакова В.Ю., Бородаев И.А. Математическая модель высокочастотной плазменной обработки многослойных материалов заготовки верха обуви // Вестник Казанского технологического университета. – 2012. – Т. 15, № 17. – С. 36–39.
8. Бадриев И.Б., Желтухин В.С., Чебакова В.Ю. Численное исследование низкотемпературной ВЧЕ-плазмы в аргоне при повышенных давлениях // Материалы XI Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ'2016). – Москва: Изд-во МАИ, 2016. – С. 477–479.
9. Швейгерт В.А. Катодный слой тлеющего несамостоятельного разряда в поднормальном режиме // Журнал технической физики. – 1993. – Т. 63, вып. 5 – С. 29–40.
10. Исламов Р.Ш. Моделирование формирования анодного пятна в самостоятельном тлеющем разряде // Журнал технической физики. – 1991 – Т. 61, Вып. 7 – С. 12–15.
11. Исламов Р.Ш. О разрешимости диффузионно-дрейфового приближения в теории газового разряда. – Троицк, 1991. – 32с. (НИЦТЛАН 91-81).
12. Исламов Р.Ш. О регулярности решения уравнений диффузионно-дрейфового приближения в теории газового разряда // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2006. – Т. 46, № 1. – С. 131–147.
13. Полак Л.С., Синярев Г.Б., Словецкий Д.И. и др. Химия плазмы / Под редакцией Л.С. Полака и Ю.А. Лебедева. – Новосибирск: Наука, 1991. – 325 с.
14. Лебедев Ю.А. Сравнение неравновесной плазмы самостоятельных электрических разрядов. Высокочастотный разряд в волновых полях. – Самара, 1990. – С. 25–62.
15. Смирнов Б.М. Процессы ионизации при медленных столкновениях атомов // Успехи физических наук. – 1981. – Т. 133, Вып. 4. – С. 569–616.
16. Karoulina E., Lebedev Yu. Computer simulation of microwave and dc plasmas: comparative characterization of plasmas // J. Phys. D: Appl. Phys. – 1992. – V. 25. – P. 401–412.
17. Lymberopoulos Dimitris P., Economou Demetre J. Fluid simulations of glow discharge & Effect of metastable atoms in argon // J. Appl. Phys. – 1993. – V. 73, № 8. – P. 3668–3679.
18. Богданов Е.А., Кудрявцев А.А., Цендин Л.Д., Арсланбеков Р.Р., Колобов В.И., Кудрявцев В.В. Влияние метастабильных атомов и нелокальности электронного распределения на характеристики положительного столба разряда в аргоне // Журнал технической физики. – 2004. – Т. 74, Вып. 6. – С. 35–42.
19. Lauro-Taroni L., Turner M.M., Braithwaite N.St.J. Analysis of the excited argon atoms in the GEC RF reference cell by means of one-dimensional PIC simulations // J. Phys. D: Appl. Phys. – 2004. – V. 37. – P. 2216–2222.
20. Epstein I.L., Gavrilović M., Jovircević S., Konjević N., Lebedev Yu.A., Tatarinov A.V. The study of a homogeneous column of argon plasma at a pressure of 0.5 torr, generated by means of the Beenakker's cavity // Eur. Phys. J. D. – 2014. – V. 68. – Art. 334, P. 1–9.
21. Байсова Б.Т., Струнин В.И., Струнина Н.Н., Худайбергенов Г.Ж. Абсолютные заселенности метастабильных состояний аргона в плазме высокочастотного разряда // Журнал технической физики. – 2003. – Т. 73, Вып. 8. – С. 30–33.

22. Дятко Н.А., Ионих Ю.З., Мещанов А.В., Напартович А.П. Исследование темной фазы. на стадии развития положительного столба тлеющего разряда в аргоне // Физика плазмы. – 2005. – Т. 31, № 10. – С. 939–953.
23. Hagelaar G.J.M., Pitchford L.C. Solving the Boltzmann equation to obtain electron transport coefficients and rate coefficients for fluid models // Plasma Sources Sci. Techn. – 2005. – V. 14 – P. 722–733.
24. Чебакова В.Ю. Численное моделирование высокочастотного емкостного разряда // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2015. – Т. 157, № 2. – С. 126–140.
25. Hagelaar G.J.M., de Hoog F.J., Kroesen G.M.W. Boundary conditions in fluid models of gas discharges // Physical review E. – 2000. – V. 62, № 1. – P. 1452–1454.
26. Желтухин В.С., Соловьёв С.И., Соловьёв П.С., Чебакова В.Ю. Вычисление минимального собственного значения нелинейной задачи Штурма–Лиувилля // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2013. – Т. 155, № 3. – С. 91–104.
27. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Продольно-поперечный изгиб по цилиндрической форме трехслойной пластины, подкреплённой в торцевых сечениях абсолютно твердыми телами // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2017. – Т. 159, № 2. – С. 174–190.
28. Solov'ev S.I. Approximation of nonlinear spectral problems in a Hilbert space // Differential Equations. – 2015. – V. 51, № 7. – P. 934–947.
29. Solov'ev S.I. Superconvergence of finite element approximations to eigenspaces // Differential Equations. – 2002. – V. 38, № 5. – P. 752–753.
30. Zheltukhin V.S., Solovyev S.I., Solovyev P.S., Chebakova V.Yu. Existence of solutions for electron balance problem in the stationary radio-frequency induction discharges // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2016. – V. 158, art. 012103.
31. Zheltukhin V.S., Solov'Ev S.I., Solov'Ev P.S., Chebakova V.Yu., Sidorov A.M. Third type boundary conditions for steady state ambipolar diffusion equation // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2016. – V. 158, art. 012102.
32. Badriev I.B., Garipova G.Z., Paymushin V.N., Makarov M.V. Numerical solution of the issue about geometrically nonlinear behavior of sandwich plate with transversal soft filler // Research Journal of Applied Sciences. – 2015. – V. 10, № 8. – P. 428–435.
33. Бадриев И.Б., Буянов В.Ю., Макаров М.В. Исследование задачи о потере устойчивости трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. – 2017. – Т. 5, № 7-2 (33-2). – С. 92–94.
34. Бадриев И.Б. О решении вариационных неравенств второго рода // В сборнике: Сеточные методы для краевых задач и приложения Материалы Девятой Всероссийской конференции. – Казань: Отечество, 2012. – С. 32–35.
35. Бадриев И.Б., Ляшко А.Д., Панкратова О.В. Исследование сходимости итерационных методов решения нелинейных задач теории фильтрации // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1998. – № 11. – С. 8–13.
36. Бадриев И.Б., Фанюк Б.Я. Итерационные методы решения задач фильтрации в многослойных пластах при наличии точечного источника // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2010. – Т. 152, № 4. – С. 39–55.
37. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Геометрически нелинейная задача о продольно-поперечном изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // Ученые записки Казанского университета. Серия: физико-математические науки. – 2016. – Т. 158, № 4. – С. 453–468.
38. Бадриев И.Б., Задворнов О.А. Итерационные методы решения вариационных неравенств второго рода с обратно сильно монотонными операторами // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2003. – № 1. – С. 20–28.
39. Бадриев И.Б., Задворнов О.А. О сходимости итерационного метода двойственного типа решения смешанных вариационных неравенств // Дифференциальные уравнения. – 2006. – Т. 42, № 8. – С. 1115–1122.
40. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Исследование задачи об изгибе трехслойной пластины в физически нелинейной постановке // Математическое моделирование и краевые задачи Труды десятой Всероссийской научной конференции с международным участием: в 3-х томах. Самара, 2016. – С. 19–24.
41. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Контактная постановка задач механики подкреплённых на контуре трехслойных оболочек с трансверсально-мягким заполнителем // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2017. – № 1. – С. 77–85.
42. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Задворнов О.А. О решении задачи равновесия мягкой сетчатой оболочки при наличии нагрузки, сосредоточенной в точке // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2013. – № 3. С. 16–34.

43. Бадриев И.Б., Задворнов О.А. Исследование разрешимости осесимметричной задачи об определении положения равновесия мягкой оболочки вращения // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2005. – № 1. – С. 25–30.
44. Zheltukhin V., Chebakova V. Numerical solution of the model problem of CCRF-discharge at atmospheric pressure // MATEC Web of Conferences. – 2017. – V. 129, art. 03017.
45. Chebakova V.Y. Modeling of radio-frequency capacitive discharge under atmospheric pressure in argon // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2017. – V. 38, № 6. – P. 1165–1178.