Бадриев И.Б., Макаров М.В., Смирнова Е.В.
*Казанский (Приволжский) федеральный университет
Казань, Россия*

doi: 10.18411/ij-31-03-2017-2-01
idsp 000001:ij-31-03-2017-2-01

О псевдомонотонности оператора геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины

Введение.

Настоящая работа посвящена изучению геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем. Как отмечается в [1], многослойные конструкции находят все большее применение в различных отраслях народного хозяйства. Благодаря целесообразному выбору и составу отдельных слоев могут быть созданы многослойные панели с отличными статическими и конструктивными свойствами. Идея применения композитных материалов не нова, одно из первых упоминаний об использовании их можно найти в [2] (Исход, гл. 5), но благодаря авиации и полетам в космос, когда требовались легкие и высокопрочные материалы, был дан толчок к интенсивному развитию облегченных конструкций. Области применения композиционных материалов не ограничены. Они применяются в авиации для высоконагруженных деталей самолетов (обшивки, лонжеронов, нервюр, панелей и т. д.) и двигателей (лопаток компрессора и турбины и т. д.), в космической технике для узлов силовых конструкций аппаратов, подвергающихся нагреву, для элементов жесткости, панелей, в автомобилестроении для облегчения кузовов, рессор, рам, панелей кузовов, бамперов и т. д., в горной промышленности (буровой инструмент, детали комбайнов и т. д.), в гражданском строительстве (пролеты мостов, элементы сборных конструкций высотных сооружений и т. д.) и в других областях народного хозяйства. Применение композиционных материалов обеспечивает новый качественный скачок в увеличении мощности двигателей, энергетических и транспортных установок, уменьшении массы машин и приборов. В трехслойных конструкциях нормальные усилия при изгибе воспринимаются обшивками, а сдвигающие – обрамлением или средним слоем. Средний слой обеспечивает также функции изоляции, восприятие местных нагрузок и устойчивость сжатых обшивок. Наиболее рациональное использование в трехслойных панелях свойств составляющих элементов делает эти панели предельно легкими и вместе с тем достаточно прочными, придавая им требуемые тепло-, звуко- и гидроизоляционные свойства [3–6].

Данная работа является продолжением [7–9] и посвящена доказательству

псевдомонотонности [10, 11] введенного в [9] оператора геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем, сформулированной в виде уравнения в пространстве Соболева. Обобщенные постановки для физически нелинейных и геометрически линейных задач в виде седловых задач, а также методы их решения рассмотрены в [12–16]. Физически нелинейные задачи теории мягких сетчатых оболочек изучены в [17–25]. Численное решение геометрически нелинейных задач проводилось в [26–32].

1. Постановка задачи.

Рассматриваются задачи об определении напряженно-деформированного состояния бесконечно широкой трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем. Длина пластины равна a , толщина заполнителя составляет $2t$, толщины несущих слоев равны $2t_{(k)}$, где k – номер слоя. Для описания напряженно-деформированного состояния (НДС) в несущих слоях используются уравнения модели Кирхгофа-Лява, в заполнителе – уравнения теории упругости, упрощенные в рамках принятой модели трансверсально-мягкого слоя и проинтегрированных по толщине с удовлетворением условий сопряжения слоев по перемещениям [33, 34]. В соответствии с [33, 34] введем следующие обозначения:

$H_{(k)} = t + t_{(k)}$ (всюду в дальнейшем полагаем, что $k=1,2$), $X_{(k)}^1, X_{(k)}^3$ – компоненты поверхностной нагрузки, приведенной к срединной поверхности k -го слоя, $w^{(k)}$ и $u^{(k)}$ – прогибы и осевые перемещения точек срединной поверхности k -го слоя, $T_{(k)}^{11}, M_{(k)}^{11}$ – мембранные усилия и внутренние изгибающие моменты в k -м слое. Края пластины предполагаем закрепленными, т.е. $u^{(k)}(x) = 0, w^{(k)}(x) = 0, dw^{(k)}(x)/dx = 0$ при $x = 0, x = a$. Рассматриваем геометрически

нелинейный случай: $M_{(k)}^{11} = D_{(k)} d^2 u^{(k)} / dx^2$,
 $T_{(k)}^{11} = B_{(k)} (du^{(k)} / dx + 0.5(dw^{(k)} / dx)^2)$, где $B_{(k)} = 2t_{(k)} E^{(k)} / (1 - \nu_{12}^{(k)} \nu_{21}^{(k)})$ –

жесткость k -го слоя на растяжение–сжатие, $E^{(k)}$ и $\nu_{12}^{(k)}, \nu_{21}^{(k)}$ – модуль упругости первого рода и коэффициенты Пуассона материала k -го несущего слоя, $D_{(k)} = B_{(k)} t_{(k)}^2 / 3$ – изгибная жесткость k -го слоя. Пусть $U = (w^{(1)}, w^{(2)}, u^{(1)}, u^{(2)})$ –

вектор перемещений точек срединной поверхности k -го слоя, q^1 – касательные напряжения в заполнителе. Для q^1 считаем, что выполнены граничные условия $q^1(0) = q^1(a) = 0$. В [33, 34] для описания НДС трехслойной пластины был

построен функционал $L(U, q^1) = P(U, q^1) - A_e(U, q^1) - A_q(U, q^1)$, где $P(U, q^1)$ – потенциальная энергия деформации, $A_e(U, q^1)$ – работа заданных внешних сил и моментов, $A_q(U, q^1)$ – работа неизвестных контактных касательных напряжений на соответствующих перемещениях. Пусть G_{13}, E_3 – модули поперечного сдвига и

обжатия заполнителя, $c_1 = 2t / G_{13}$, $c_2 = t^3 / (3E_3)$, $c_3 = E_3 / (2t)$, $M_{(k)}^1$ – поверхностный момент внешних сил, приведенный к срединной поверхности k-го слоя, Установлено [34], что решением задачи о равновесии трехслойной пластины являются стационарные точки функционала L. Полагаем, что все постоянные a , G_{13} , E_3 , t , $E^{(k)}$, $\nu_{12}^{(k)}$, $\nu_{21}^{(k)}$, $t_{(k)}$, $k = 1, 2$, положительны.

2. Операторная постановка задачи.

Пусть $V_k = W_2^{(k)}(0, a)$ – пространства Соболева [35] со скалярными

$$(u, \eta)_k = \int_0^a d^k u / dx^k d^k \eta / dx^k dx$$

произведениями

$$, k = 0, 1, 2, V = V_2 \times V_2 \times V_1 \times V_1.$$

Будем обозначать скалярное произведение в V через $(\cdot, \cdot)_V$. В [8, 9] были получены уравнения для стационарных точек функционала L путем вычисления производных Гато [36] этого функционала. Было установлено, что стационарные

точки (U, q^1) являются решением вариационного уравнения

$$b((U, q^1), (Z, y)) = f(Z) \quad \forall (Z, y) \in W = V \times V_1, \quad (1)$$

где форма $b(\cdot, \cdot)$, заданная на $W \times W$, и функционал f , заданный на V , определяются по формулам

$$\begin{aligned} b((U, q^1), (Z, y)) = & \int_0^a \sum_{k=1}^2 B_{(k)} \left[\frac{du^{(k)}}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw^{(k)}}{dx} \right)^2 \right] \frac{d\eta^{(k)}}{dx} dx + \\ & + \int_0^a \sum_{k=1}^2 B_{(k)} \left[\frac{du^{(k)}}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw^{(k)}}{dx} \right)^2 \right] \frac{dw^{(k)}}{dx} \frac{dz^{(k)}}{dx} dx + \int_0^a \sum_{k=1}^2 D_{(k)} \frac{d^2 w^{(k)}}{dx^2} \frac{d^2 z^{(k)}}{dx^2} dx + \\ & + c_3 \int_0^a (w^{(2)} - w^{(1)})(z^{(2)} - z^{(1)}) dx + \int_0^a \left\{ \sum_{k=1}^2 H_{(k)} \frac{dz^{(k)}}{dx} + (\eta^{(2)} - \eta^{(1)}) \right\} q^1 dx + \end{aligned} \quad (2)$$

$$+ \int_0^a \left\{ \left[\sum_{k=1}^2 H_{(k)} \frac{dw^{(k)}}{dx} + (u^{(2)} - u^{(1)}) + c_1 q^1 \right] y + c_2 dq^1 / dx dy / dx \right\} dx = 0$$

$$\forall Z = (z^{(1)}, z^{(2)}, \eta^{(1)}, \eta^{(2)}) \in V, \quad \forall y \in V_1,$$

$$f(Z) = \int_0^a \sum_{k=1}^2 \left[X_{(k)}^1 \eta^{(k)} + M_{(k)}^1 \frac{dz^{(k)}}{dx} + X_{(k)}^3 z^{(k)} \right] dx \quad \forall Z \in V. \quad (3)$$

В [9] установлено, что форма $b(\cdot, \cdot)$, задаваемая (2), порождает оператор $A: W \rightarrow W$, определяемый формулой

$$b((U, q^1), (Z, y)) = (A(U, q^1), (Z, y))_W \quad \forall (Z, y) \in W, \quad (4)$$

где $(\cdot, \cdot)_W$ – скалярное произведение в W , а функционал f , задаваемый (3), порождает элемент $F \in V$, определяемый формулой $(F, Z)_V = f(Z)$ для всех $Z \in V$.

Кроме того, из полученных в [9] оценок с учетом очевидных неравенств $\|z^{(k)}\|_{2,2} = \|z^{(k)}\|_2 \leq \|(Z, y)\|_W = (\|z^{(1)}\|_2^2 + \|z^{(2)}\|_2^2 + \|\eta^{(1)}\|_1^2 + \|\eta^{(2)}\|_1^2 + \|y\|_1^2)^{1/2}$, $\|\eta^{(k)}\|_{1,2} = \|\eta^{(k)}\|_1 \leq \|(Z, y)\|_W$, $\|y\|_{1,2} = \|y\|_1 \leq \|(Z, y)\|_W$, справедливых для всех $Z = (z^{(1)}, z^{(2)}, \eta^{(1)}, \eta^{(2)}) \in V$, $y \in V$, вытекает, что

$$|(A(U, q^1), (Z, y))_W| \leq \alpha_1 \|(U, q^1)\|_W (1 + \|(U, q^1)\|_W + \|(U, q^1)\|_W^2) \|(Z, y)\|_W,$$

откуда следует, что справедлива

Лемма 1. Оператор $A: W \rightarrow W$, определяемый соотношениями (2), (3), является ограниченным.

Итак, задача (1) может быть записана в виде операторного уравнения

$$A(U, q^1) = (F, 0) \quad (5)$$

3. Псевдомонотонность оператора A .

Напомним, что оператор $A: Y \rightarrow Y$ называется псевдомонотонным [10, 11] если он ограничен и для любой слабо сходящейся последовательности $\{v_k\}_{k=1}^{+\infty}$ в Y

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} (A v_k, v_k - v^*)_Y \leq 0$$

к v^* из неравенства для всех ζ из Y вытекает, что

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} (A v_k, v_k - \zeta)_Y \geq (A v^*, v^* - \zeta)_Y$$

При доказательстве псевдомонотонности оператора A нам потребуются следующие результаты. Справедлива теорема вложения Соболева [35, стр. 68].

Теорема 1. Пусть $\Omega \subset R^n$ – ограниченная область с регулярной границей Γ и $1 \leq p < \infty$. Тогда $W_p^{(k)}(\Omega) \subset W_r^{(j)}(\Omega)$ для $0 \leq j < k$ и каждого r , удовлетворяющего условию $1/p - (k - j)/n \leq 1/r < 1$; кроме того, для любой функции $u \in W_p^{(k)}(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\|u\|_{j,r} \leq C_{jr}^{kp} \|u\|_{k,p}, \quad (5)$$

где $\|\cdot\|_{k,p}$ – норма в $W_p^{(k)}(\Omega)$, а постоянная C_{jr}^{kp} зависит от Ω, j, k, p, r .

Далее, имеет место теорема Реллиха–Кондрашова о компактности вложений соболевских пространств [35, стр. 144].

Теорема 2. Пусть $\Omega \subset R^n$ – ограниченная область с регулярной границей Γ и $1 \leq p < \infty$. Тогда $W_p^{(m+j)}(\Omega)$ компактно вкладывается в $W_q^{(j)}(\Omega)$ при выполнении условия $mp > n$ для всех $j \geq 0, 1 \leq q < \infty$.

Отметим, что из компактности вложения X в Y следует сильная сходимост (по норме) в X последовательности, слабо сходящейся в Y .

Теорема 3. Оператор $A: W \rightarrow W$, определяемый соотношениями (2), (3), является псевдомонотонным.

Доказательство. Ограниченность оператора A установлена в лемме 1. Далее,

$$\begin{aligned} (A(U, q^1), (U, q^1))_W = & \int_0^a \sum_{k=1}^2 B_{(k)} \left[\frac{du^{(k)}}{dx} \right]^2 dx + \int_0^a \sum_{k=1}^2 D_{(k)} \left[\frac{d^2 w^{(k)}}{dx^2} \right]^2 dx + c_2 \int_0^a \left[\frac{dq^1}{dx} \right]^2 dx + \\ & + \frac{3}{2} \int_0^a \sum_{k=1}^2 B_{(k)} \frac{du^{(k)}}{dx} \left[\frac{dw^{(k)}}{dx} \right]^2 dx + \frac{3}{2} \int_0^a \sum_{k=1}^2 B_{(k)} \left[\frac{dw^{(k)}}{dx} \right]^4 dx + c_3 \int_0^a (w^{(2)} - w^{(1)})^2 dx + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^a \sum_{k=1}^2 H_{(k)} \frac{dw^{(k)}}{dx} q^1 dx + 2 \int_0^a (u^{(2)} - u^{(1)}) q^1 dx + 2 \int_0^a (q^1)^2 dx = \sum_{j=1}^9 I_j(U, q^1). \end{aligned}$$

Слабую сходимость будем обозначать символом $\xrightarrow{w}$. Пусть $(U_n, q_n^1) \xrightarrow{w} (U, q^1)$ в W при $n \rightarrow +\infty$, т.е.

$$w_n^{(k)} \xrightarrow{w} w^{(k)} \text{ в } V_2 \text{ и в } L_2(0, a) \text{ при } n \rightarrow +\infty, \quad (6)$$

$$u_n^{(k)} \xrightarrow{w} u^{(k)} \text{ в } V_1 \text{ при } n \rightarrow +\infty, \quad (7)$$

$$q_n^1 \xrightarrow{w} q^1 \text{ в } V_1 \text{ при } n \rightarrow +\infty. \quad (8)$$

Из теоремы 2 и соотношения (6) вытекает, что

$$w_n^{(k)} \rightarrow w^{(k)} \text{ в } W_q^{(1)}(0, a) \text{ и в } L_q(0, a), \quad q \geq 1, \text{ при } n \rightarrow +\infty. \quad (9)$$

Из теоремы 2 и соотношений (7), (8) вытекает, что

$$u_n^{(k)} \rightarrow u^{(k)}, \quad q_n^1 \rightarrow q \text{ в } L_q(0, a), \quad q \geq 1, \text{ при } n \rightarrow +\infty. \quad (10)$$

Кроме того, из (7)–(9) следует, что

$$dw_n^{(k)} / dx \rightarrow dw^{(k)} / dx, \quad du_n^{(k)} / dx \xrightarrow{w} du^{(k)} / dx \text{ в } L_2(0, a) \text{ при } n \rightarrow +\infty. \quad (11)$$

Далее (см., напр., [37]),

$$\text{Если } v_n \rightarrow v^*, \quad \zeta_n \xrightarrow{w} \zeta^* \text{ в } Y \text{ при } n \rightarrow +\infty, \text{ то } (v_n, \zeta_n)_Y \rightarrow (v^*, \zeta^*)_Y \text{ при } n \rightarrow +\infty. \quad (12)$$

В силу слабой полунепрерывности снизу [38] нормы (см., напр., [37, 39]) имеем, что

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} I_j(U_n, q_n^1) \geq I_j(U, q^1), \quad j = 1, 2, 3. \quad (13)$$

Из (9) имеем, что $w_n^{(k)} \rightarrow w^{(k)}$ в $W_4^{(1)}(0, a)$ при $n \rightarrow +\infty$, следовательно, применяя неравенство Минковского [40], получаем

$$\begin{aligned}
& \int_0^a \left[\left(dw_n^{(k)} / dx \right)^2 - \left(dw^{(k)} / dx \right)^2 \right]^2 dx = \\
& = \int_0^a \left[dw_n^{(k)} / dx + dw^{(k)} / dx \right]^2 \left[dw_n^{(k)} / dx - dw^{(k)} / dx \right]^2 dx \leq \\
& \leq \left\{ \int_0^a \left[dw_n^{(k)} / dx + dw^{(k)} / dx \right]^4 dx \right\}^{1/2} \left\{ \int_0^a \left[dw_n^{(k)} / dx - dw^{(k)} / dx \right]^4 dx \right\}^{1/2} \leq \\
& \leq \left[\|w_n^{(k)}\|_{1,4} + \|w^{(k)}\|_{1,4} \right]^2 \|w_n^{(k)} - w^{(k)}\|_{1,4}^2 \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow +\infty,
\end{aligned}$$

откуда

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^a \left[\left(dw_n^{(k)} / dx \right)^2 - \left(dw^{(k)} / dx \right)^2 \right]^2 dx = 0 \quad (14)$$

и, с учетом (11), (12),

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_4(U_n, q_n^1) = I_4(U, q^1). \quad (15)$$

Принимая во внимание (14), получаем

$$\begin{aligned}
& \int_0^a \left[\left(dw_n^{(k)} / dx \right)^4 - \left(dw^{(k)} / dx \right)^4 \right] dx = \\
& = \int_0^a \left[\left(dw_n^{(k)} / dx \right)^2 + \left(dw^{(k)} / dx \right)^2 \right] \left[\left(dw_n^{(k)} / dx \right)^2 - \left(dw^{(k)} / dx \right)^2 \right] dx \leq \\
& \leq \left\{ \int_0^a \left[\left(dw_n^{(k)} / dx \right)^2 + \left(dw^{(k)} / dx \right)^2 \right]^2 dx \right\}^{1/2} \left\{ \int_0^a \left[\left(dw_n^{(k)} / dx \right)^2 - \left(dw^{(k)} / dx \right)^2 \right]^2 dx \right\}^{1/2} \leq \\
& \leq \left[\|w_n^{(k)}\|_{1,4}^2 + \|w^{(k)}\|_{1,4}^2 \right] \left\{ \int_0^a \left[\left(dw_n^{(k)} / dx \right)^2 - \left(dw^{(k)} / dx \right)^2 \right]^2 dx \right\}^{1/2} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow +\infty,
\end{aligned}$$

а значит,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_5(U_n, q_n^1) = I_5(U, q^1). \quad (16)$$

Наконец, из (9)–(11) и непрерывности нормы вытекает, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_j(U_n, q_n^1) = I_j(U, q^1), \quad j = 6, 7, 8, 9.. \quad (17)$$

Используя теперь то, что если $\liminf_{k \rightarrow +\infty} \alpha_k \geq \alpha$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \beta_k = \beta$, то $\liminf_{k \rightarrow +\infty} (\alpha_k + \beta_k) \geq \alpha + \beta$ (см., напр. [41]), из (13), (15)–(17) получаем

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} (A(U_n, q_n^1), (U_n, q_n^1))_W \geq (A(U, q^1), (U, q^1))_W. \quad (18)$$

Из (11) следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^a \left[\frac{du_n^{(k)}}{dx} - \frac{du^{(k)}}{dx} \right] \frac{d\eta^{(k)}}{dx} dx &= 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^a \left[\frac{dq_n^1}{dx} - \frac{dq^1}{dx} \right] \frac{dy}{dx} dx = 0, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^a \left[\frac{dw_n^{(k)}}{dx} - \frac{dw^{(k)}}{dx} \right] y dx &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Из (14) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^a \left[(dw_n^{(k)} / dx)^2 - (dw^{(k)} / dx)^2 \right] d\eta^{(k)} dx = 0. \quad (20)$$

Из (9) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^a \left[(w_n^{(2)} - w_n^{(1)}) - (w^{(2)} - w^{(1)}) \right] (z^{(2)} - z^{(1)}) dx = 0. \quad (21)$$

Из (10) следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^a \left[(u_n^{(2)} - u_n^{(1)}) - (u^{(2)} - u^{(1)}) \right] y dx &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^a (q_n^1 - q^1) \left[dz^{(k)} / dx + (\eta^{(2)} - \eta^{(1)}) \right] dx &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Далее, в силу теоремы 1 $w^{(k)} \in W_q^{(1)}(0, a)$, $w_n^{(k)} \in W_q^{(1)}(0, a)$ для любого $q \geq 1$, а значит, в силу обобщенного неравенства Гельдера с показателями 2, 4, 4 [40]

$$\begin{aligned} &\int_0^a \left[\frac{du_n^{(k)}}{dx} \left(\frac{dw_n^{(k)}}{dx} \right)^3 - \frac{du^{(k)}}{dx} \left(\frac{dw^{(k)}}{dx} \right)^3 \right] \frac{dz^{(k)}}{dx} dx = \\ &= \int_0^a \frac{du_n^{(k)}}{dx} \left(\left(\frac{dw_n^{(k)}}{dx} \right)^3 - \left(\frac{dw^{(k)}}{dx} \right)^3 \right) \frac{dz^{(k)}}{dx} + \int_0^a \left(\frac{du_n^{(k)}}{dx} - \frac{du^{(k)}}{dx} \right) \left(\frac{dw^{(k)}}{dx} \right)^3 \frac{dz^{(k)}}{dx} dx \leq \end{aligned}$$

$$\leq \left(\int_0^a \left(\frac{du_n^{(k)}}{dx} \right)^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^a \left(\left(\frac{dw_n^{(k)}}{dx} \right)^3 - \left(\frac{dw^{(k)}}{dx} \right)^3 \right)^4 dx \right)^{1/4} \left(\int_0^a \left(\frac{dz^{(k)}}{dx} \right)^4 dx \right)^{1/4} +$$

$$+ \int_0^a \left(\frac{du_n^{(k)}}{dx} - \frac{du^{(k)}}{dx} \right) \left(\frac{dw^{(k)}}{dx} \right)^3 \frac{dz^{(k)}}{dx} dx$$

Слабо сходящаяся последовательность ограничена: $\left(\int_0^a \left(\frac{du_n^{(k)}}{dx} \right)^2 dx \right)^{1/2} \leq \alpha_3$, в силу теоремы

1 $z^{(k)} \in W_4^{(1)}(0, a)$. Наконец,

$$\left(\int_0^a \left(\left(\frac{dw_n^{(k)}}{dx} \right)^3 - \left(\frac{dw^{(k)}}{dx} \right)^3 \right)^4 dx \right)^{1/4} \leq$$

$$\leq \|w_n^{(k)} - w^{(k)}\|_{1,16} (\|w_n^{(k)}\|_{1,8} + \|w^{(k)}\|_{1,8} + \|w_n^{(k)}\|_{1,16} \|w^{(k)}\|_{1,16}) \leq$$

$$\leq \|w_n^{(k)} - w^{(k)}\|_{1,16} (\alpha_4 + \alpha_5 \|w^{(k)}\|_{1,16} + \|w^{(k)}\|_{1,8}) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow +\infty,$$

а значит,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^a \left[\frac{du_n^{(k)}}{dx} \left(\frac{dw_n^{(k)}}{dx} \right)^3 - \frac{du^{(k)}}{dx} \left(\frac{dw^{(k)}}{dx} \right)^3 \right] \frac{dz^{(k)}}{dx} dx = 0. \quad (23)$$

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} (A(U_n, q_n^1), (Z, y))_W = (A(U, q^1), (Z, y))_W,$$

Из (19)–(23) вытекает, что для любого $(Z, y) \in W$, откуда с учетом (18) и вытекает псевдомонотонность оператора A .

4. Заключение.

Доказано, что оператор, возникающий при математическом описании геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем является псевдомонотонным. Это дает возможность использовать при исследовании корректности задачи (1) по аналогии с [42–49] использовать результаты общей теории монотонных операторов. Кроме того данное свойство может быть полезным при исследовании сходимости приближенных методов решения задачи. При этом будут использованы разработанные в [50–61] подходы.

Публикация осуществлена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №№ 15-01-05686, 16-38-00788, 17-08-01279).

Литература

1. Штамм К., Витте Х. Многослойные конструкции. – М.: Стройиздат, 1983. – 300 с.
2. Библия. Книги священного писания Ветхого и Нового Завета. – М.: Московская Патриархия, 1988. – 1371 с.
3. Макаров М.В., Бадриев И.Б., Паймушин В.Н. Нелинейные задачи о смешанных формах потери устойчивости трехслойных пластин при продольно-поперечном изгибе // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2015. – Т. 20, № 5. – С. 1275–1278.
4. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Решение нелинейных задач теории многослойных оболочек с трансверсально-мягким наполнителем // В сборнике: Сеточные методы для краевых задач и приложения Материалы Десятой Международной конференции, 2014. – С. 103–107.
5. Paimushin V.N. Problems of geometric non-linearity and stability in the mechanics of thin shells and rectilinear columns // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2007. – V. 71, № 5. – P. 772–805.
6. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Контактная постановка задач механики подкрепленных на контуре трехслойных оболочек с трансверсально-мягким наполнителем // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2017. – № 1. – С. 77–85.
7. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Мартынова О.П. Постановка геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким наполнителем // Тенденции науки и образования в современном мире. – 2016. – № 16-1. – С. 5–11.
8. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Мартынова О.П. Операторная формулировка геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким наполнителем // Тенденции науки и образования в современном мире. – 2016. – № 18-3. – С. 5–13.
9. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Смирнова Е.В. Обобщенная постановка геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины // Тенденции науки и образования в современном мире. – 2017. – № 23-1. – С. 4–10.
10. Brezis H. Équations et inéquations non-linéaires dans les espaces vectoriels en dualité // Annales de l'institut Fourier (Grenoble). – 1968. – V. 19. – P. 115–175.
11. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 588 с.
12. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Макаров М.В. Численное исследование физически нелинейных задач об изгибе трехслойных пластин // В сборнике: Материалы XI Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ'2016) Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 2016. – С. 475–477.
13. Бадриев И.Б., Гарипова Г.З., Макаров М.В., Паймушин В.Н., Хабибуллин Р.Ф. О решении физически нелинейных задач о равновесии трехслойных пластин с трансверсально-мягким наполнителем // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2015. – Т. 157, № 1. – С. 15–24.
14. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Гарипова Г.З., Макаров М.В. О разрешимости нелинейной задачи о равновесии трехслойной пластины // Вестник Тамбовского

- университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2015. – Т. 20, № 5. – С. 1034–1037.
15. Бадриев И.Б., Гарипова Г.З., Макаров М.В. Сеточные аппроксимации физически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // В сборнике: Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна - 2016. Материалы международной конференции. – Воронеж: Издательско-полиграфический центр «Научная книга», 2016. – С. 70–72.
 16. Badriev I.B., Garipova G.Z., Makarov M.V., Paimushin V.N., Khabibullin R.F. Solving physically nonlinear equilibrium problems for sandwich plates with a transversally soft core // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2015. – V. 36, № 4. – P. 474–481.
 17. Badriev I.B., Banderov V.V. Numerical solution of the equilibrium of axisymmetric soft shells // Математические методы в технике и технологиях - ММТТ. – 2014. – № 5 (64). – С. 16–20.
 18. Badriev I.B., Banderov V.V., Gnedenkova V.L., Kalacheva N.V., Korablev A.I., Tagirov R.R. On the finite dimensional approximations of some mixed variational inequalities // Applied Mathematical Sciences. – 2015. – V. 9, № 113-116. – P. 5697–5705.
 19. Бадриев И.Б. Решение вариационных задач нелинейных процессов механики сплошной среды // В книге: Теория управления и математическое моделирование Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова. Удмуртский государственный университет. – Ижевск: Изд-во "Удмуртский университет", 2015. – С. 234–235.
 20. Бадриев И.Б. О решении вариационных неравенств второго рода // В сборнике: Сеточные методы для краевых задач и приложения Материалы Девятой Всероссийской конференции. – Казань: Отечество, 2012. – С. 32–35.
 21. Бадриев И.Б., Бандеров В.В. Численное моделирование деформирования биокomпозитов // В книге: Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред Материалы XXI международного симпозиума имени А.Г. Горшкова. Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет). – Москва: ООО "ТРИП", 2015. – С. 7–9.
 22. Бадриев И.Б., Задворнов О.А. Исследование разрешимости осесимметричной задачи об определении положения равновесия мягкой оболочки вращения // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2005. – № 1. – С. 25–30.
 23. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Калачева Н.В. Численное исследование вариационных и квазивариационных неравенств теории мягких сетчатых оболочек // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2015. – Т. 20, № 5. – С. 1037–1041.
 24. Бадриев И.Б., Бандеров В.В. Численное решение задач о равновесии осесимметричных мягких оболочек // Вестник Тамбовского государственного технического университета. – 2015. – Т. 21, № 1. – С. 29–35.
 25. Бадриев И.Б., Бандеров В.В. Итерационные методы решения вариационных неравенств теории мягких оболочек // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2013. – Т. 155, кн.2. – С. 18–32.
 26. Badriev I.B., Garipova G.Z., Paymushin V.N., Makarov M.V. Numerical solution of the issue about geometrically nonlinear behavior of sandwich plate with transversal soft filler // Research Journal of Applied Sciences. – 2015. – V. 10, № 8. – P. 428–435.
 27. Бадриев И.Б., Желтухин В.С., Чебакова В.Ю. О решении некоторых нелинейных краевых и начально-краевых задач // В книге: Материалы XXII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова Московский авиационный институт

- (национальный исследовательский университет). – Москва: ООО "ТРП", 2016. – С. 31–33.
28. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Разрешимость физически и геометрически нелинейной задачи теории трехслойных пластин с трансверсально-мягким заполнителем // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2015. – № 10. – С. 66–71.
 29. Макаров М.В., Бадриев И.Б., Паймушин В.Н. Определение критических точек бифуркации для задачи о геометрически нелинейном поведении трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // В сборнике: Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна - 2016. Материалы международной конференции. – Воронеж: Издательско-полиграфический центр «Научная книга», 2016. – С. 292–294.
 30. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Исследование задачи об изгибе трехслойной пластины в физически нелинейной постановке // В сборнике: Математическое моделирование и краевые задачи Труды десятой Всероссийской научной конференции с международным участием: в 3-х томах, 2016. – С. 19–24.
 31. Макаров М.В. Численное исследование геометрически нелинейной задачи о поперечном изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // Тенденции науки и образования в современном мире. – 2016. – № 17-2. – С. 26–35.
 32. Макаров М.В. О решении геометрически нелинейных и линейных задач о поперечном изгибе жестко закрепленной трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // Тенденции науки и образования в современном мире. – 2016. – № 19-2. – С. 23–29.
 33. Paimushin V.N., Bobrov S.N. Refined geometric nonlinear theory of sandwich shells with a transversely soft core of medium thickness for investigation of mixed buckling forms // Mechanics of Composite Materials. – 2000. – V. 36, № 1. – P. 59–66.
 34. Паймушин В.Н. Обобщенный вариационный принцип Рейсснера в нелинейной механике пространственных составных тел с приложениями к теории многослойных оболочек // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 1987. – № 2. – С. 171.
 35. Adams R.A. Sobolev Spaces. – New York, San Francisco, London: Academic Press, 1975. – 286 p.
 36. Вайнберг М.М. Вариационный метод и метод монотонных операторов. – М: Наука, 1972. – 416 с.
 37. Бадриев И.Б., Задворнов О.А. Итерационные методы решения вариационных неравенств в гильбертовых пространствах. – Казань: Казанский государственный университет, 2007. – 152 с.
 38. Ekeland I., Temam R. Convex Analysis and Variational Problems, Amsterdam: North-Holland, 1976. – 402 p.
 39. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1981. – 400 с.
 40. Hardy G.H., Littlewood J.E., Pólya G. Inequalities. – Cambridge: Cambridge University Press, 1934. – 314 p.
 41. Теляковский С.А. Курс лекций по математическому анализу. Семестр I. – М.: МИАН, 2009. – 212 с.
 42. Бадриев И.Б. Математическое моделирование процессов механики сплошной среды при наличии точечных источников и нагрузок // В книге: Материалы XXII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова Московский

- авиационный институт (национальный исследовательский университет). – Москва: ООО "ТРИ", 2016. – С. 28–31.
43. Badriev I.B. Mathematical modeling of continuum mechanics problems with the point sources // В сборнике: Проблемы химмотологии: от эксперимента к математическим моделям высокого уровня. Сборник избранных докладов VI Международной научно-технической конференции, 2016. – С. 19–21.
44. Бадриев И.Б., Фанюк Б.Я. Итерационные методы решения задач фильтрации в многослойных пластах при наличии точечного источника // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2010. – Т. 152, № 4. – С. 39–55.
45. Бадриев И.Б., Сингатуллин М.Т., Чебаков Ю.В. Численное исследование задач подземной установившейся фильтрации высоковязких жидкостей при наличии скважин // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2015. – Т. 20, № 5. – С. 1041–1044.
46. Badriev I.B., Banderov V.V., Singatullin M.T. Numerical solution of non-linear filtration issues for high viscous fluids at the presence of wells // Research Journal of Applied Sciences. – 2015. – V. 10, № 8. – P. 343–346.
47. Badriev I.B., Fanyuk B.Y. Iterative methods for solving seepage problems in multilayer beds in the presence of a point source // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2012. – V. 33, № 4. – P. 386–399.
48. Бадриев И.Б., Задворнов О.А. Итерационные методы решения вариационных неравенств второго рода с обратно сильно монотонными операторами // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2003. – № 1. – С. 20–28.
49. Желтухин В.С., Чебакова В.Ю., Шнейдер М.Н. Моделирование ВЧЕ-разряда при больших межэлектродных расстояниях // В сборнике: Сеточные методы для краевых задач и приложения. Материалы Девятой Всероссийской конференции. – Казань: Отечество, 2012. – С. 183–186.
50. Бадриев И.Б., Задворнов О.А. О сходимости итерационного метода двойственного типа решения смешанных вариационных неравенств // Дифференциальные уравнения. – 2006. – Т. 42, № 8. – С. 1115–1122.
51. Абдуллин И.Ш., Желтухин В.С., Чебакова В.Ю., Шнейдер М.Н. Тематическая модель ВЧЕ-разряда в аргоне при больших межэлектродных расстояниях // Вестник Казанского технологического университета. – 2013. – Т. 16, № 22. – С. 334–338.
52. Бикчантаев Д.Х., Желтухин В.С., Чебакова В.Ю. Численное исследование процесса взаимодействия высокочастотного емкостного разряда с материалами // В книге: Теория управления и математическое моделирование. Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова. Удмуртский государственный университет. – Ижевск: Изд-во "Удмуртский университет", 2015. – С. 241–242.
53. Желтухин В.С., Соловьёв С.И., Соловьёв П.С., Чебакова В.Ю. Вычисление минимального собственного значения нелинейной задачи Штурма – Лиувилля // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2013. – Т. 155, № 3. – С. 91–104.
54. Бадриев И.Б., Ляшко А.Д., Панкратова О.В. Исследование сходимости итерационных методов решения нелинейных задач теории фильтрации // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1998. – № 11. – С. 8–13.
55. Бадриев И.Б. Математическое моделирование стационарных задач подземной фильтрации с многозначным законом // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2013. – Т. 18, № 5-2. – С. 2444–2446.

56. Чебакова В.Ю. Моделирование высокочастотного емкостного разряда при атмосферном давлении в аргоне // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2016. – Т. 158, № 3. – С. 404–423.
57. Бадриев И.Б., Нечаева Л.А. Математическое моделирование установившейся фильтрации с многозначным законом // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2013. – № 3. – С. 35–62.
58. Бадриев И.Б., Исмагилов И.Н. Итерационные методы решения нелинейных стационарных задач анизотропной фильтрации // Журнал Средневолжского математического общества. – 2006. – Т. 8, № 1. – С. 150–159.
59. Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N. Numerical investigation of physically nonlinear problem of sandwich plate bending // В сборнике: Procedia Engineering 2. Сер. "2nd International Conference on Industrial Engineering, ICIE 2016", 2016. – P. 1050–1055.
60. Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N. Mathematical simulation of nonlinear problem of three-point composite sample bending test // В сборнике: Procedia Engineering 2. Сер. "2nd International Conference on Industrial Engineering, ICIE 2016", 2016. – P. 1056–1062.
61. Бадриев И.Б., Чебакова В.Ю. Математическое моделирование низкотемпературной ВЧЕ-плазмы в аргоне // В сборнике: Математическое моделирование и краевые задачи Труды десятой Всероссийской научной конференции с международным участием: в 3-х томах, 2016. – С. 17–21.