Лифинцев М. А., Мандрыкина Н. Е., Кичигина А. К., Свиридова И. В.
Белгородский государственный национальный исследовательский университет
Белгород, Россия

doi: 10.18411/lj-31-01-2017-1-05
idsp 000001:lj-31-01-2017-1-05

Об автоматизации программного сравнения методов СЛАУ

Решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) – одна из основных задач вычислительной линейной алгебры. Значительная часть численных методов решения различных задач включает в себя решение систем линейных уравнений как элементарный шаг соответствующего алгоритма.

В практических задачах часто бывает нужно найти решение, удовлетворяющее большому числу возможно противоречивых требований. Такая задача сводится к системе линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \iff AX = B$$

при числе уравнений m большем числа неизвестных n , то такая переопределенная система, как правило, несовместна. В этом случае задача может быть решена только путем выбора некоторого компромисса – все требования могут быть удовлетворены не полностью, а лишь до некоторой

степени [2]. Псевдорешение системы $AX=B$ называется столбец $X \in \mathbb{R}^n$, обеспечивающий минимум величины

$$\sum_{i=1}^m [a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - b_i]^2$$

Такому определению можно также соотнести вероятностную интерпретацию. Пусть для определения неизвестных величин $x_1 \dots x_n$ проводятся m экспериментов, описываемых линейными уравнениями:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i \quad \text{при } i \in \{1, \dots, m\}$$

При этом величины $\{a_{ij}\}, i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}$ – известные постоянные, не подверженные сопутствующим экспериментам погрешностям, а

вот величины $\{b_i\}_{i=1}^m$ этим погрешностям подвержены. Формально каждое из равенств следует рассматривать как приближенное. Понятно, что при таких обстоятельствах не имеет смысла гоняться за точным решением системы $AX=B$. Искать следует приближенное решение, оптимальное в некотором смысле.

Существует псевдорешение системы $AX=B$ и оно является решением системы $[A^T A]=A^T B$. Это решение будет единственным тогда и только тогда, когда $\text{rank} A=n$.

Система $[A^T A]=A^T B$ называется нормальной системой по отношению к системе $AX=B$. Формально она получается домножением системы $AX=B$ слева на матрицу A^T . Заметим также, что если $m=n$ и $\det A \neq 0$, то псевдорешение системы совпадает с решением в традиционном смысле.

Если нормальная система имеет бесконечное количество решений, то обычно в качестве псевдорешения берут какое-то одно из них – как правило, у которого минимальна сумма квадратов компонент («длина»).

В качестве языка программирования для автоматизации программного сравнения СЛАУ был выбран язык C++. Это очень мощный язык, позволяющий создавать программы любого назначения и любой сложности[1].

Определившись с выбором подходящего компилятора, можно приступить к написанию самой программы. В начале работы с программой высвечивается форма, которая требует ввода размерности матрицы, а затем введения элементов.

Рисунок 3, 4 – Формы требующие ввести размерность матрицы и ее элементы

После ввода всех необходимых данных в программу, проводится решение систем методом SVD и методом прогонки, которые выбираются пользователем самостоятельно.

Рисунок 5, 6 – Решение методом SVD и методом прогонки

Время расчета метода прогонки – 1,7секунд. Время расчета метода SVD – 1,5 секунд.

Метод наименьших квадратов (SVD) дает точное решение системы алгебраических уравнений, но требует перед своим применением дополнительные преобразования – проверку на то, что количество строк больше количества столбцов.

Во-первых, количество строк сильно зависит от матрицы A исходной системы уравнений вида $Ax=b$. Чем больше количество строк в уравнении, тем больше времени требуется программе, чтобы найти корни данной системы. Во-вторых, на количество шагов влияет начальное приближение. Чем оно ближе к точному решению, тем меньше требуется шагов для сходимости метода.

В итоге можно сделать вывод: метод наименьших квадратов (SVD) является лучшим при решении системы линейных уравнений, он является менее объемным и требует меньше времени для нахождения корней, чем метод прогонки.

Литература

1. М. Шлее. Qt 4.8. Профессиональное программирование на C++. – СПб.: БХВ-Петербург, 2012. – с. 452
2. Численное решение переопределенных СЛАУ. Метод наименьших квадратов. [Электронный ресурс] – Режим доступа <http://www.intuit.ru/studies/courses/1012/168/lecture/4594>