РАЗДЕЛ IX. МАТЕМАТИКА

Старостин Н.П., Тихонов Р.С.

Квазитрехмерная математическая модель динамики температурного поля в системе полимерных подшипников скольжения*Институт проблем нефти и газа СО РАН
(Россия, Якутск)**doi: 10.18411/lj-30-11-2017-29**idsp: 000001:lj-30-11-2017-29***Аннотация**

Разработана квазитрехмерная математическая модель теплового процесса в системе подшипников на общем валу с учетом его вращения. Вычислительными экспериментами для заданной скорости вращения вала определен максимальный шаг по времени пригодный для практических расчетов.

Ключевые слова: математическое моделирование, система подшипников скольжения, уравнение теплопроводности, температура, фрикционное тепловыделение.

Введение. Необходимость использования упрощенных математических моделей возникает при решении многих прикладных задач. Например, квазитрехмерная (упрощенная) математическая модель теплового процесса в системе подшипников скольжения может быть использована для восстановления по температурным данным моментов сил трения путем решения граничной обратной задачи. Сложность решения обратных задач определения сосредоточенного источника теплоты, возникающего при трении тел, как функции пространственных переменных по замерам температуры заключается в необходимости учета пространственного распределения температуры, чтобы обеспечить адекватность используемой математической модели реальному тепловому процессу в объекте исследования. В то же время, при решении граничной обратной задачи в трехмерной постановке в качестве дополнительной информации необходимо задавать замеры температуры во всех точках некоторой условной поверхности в окрестности поверхности теплообразования. Такое измерение температур неизбежно приводит к нарушению целостности материала объекта исследования, и это обстоятельство ограничивает практическое приложение граничных обратных задач теплообмена в трехмерной постановке. Тем не менее, если принять некоторые допущения в математических моделях, становится возможным учесть трехмерное распределение температуры и в то же время значительно уменьшить необходимое количество точек задания температурной информации. Успешное решение обратной задачи во многом зависит от эффективности алгоритма решения прямой задачи определения динамики температурного поля. В данной работе рассматриваются вычислительные аспекты численной реализации квазитрехмерной математической модели теплового процесса в системе подшипников скольжения с учетом скорости движения общего вала.

Квазитрехмерная модель. Рассмотрим систему подшипников скольжения из полимерных композиционных материалов. Вращающийся с угловой скоростью Ω стальной вал опирается на N втулок из антифрикционного материала, жестко соединенных со стальными корпусами (обоймами) подшипников (рис.1).

Рис.1. Геометрическая схема систем подшипников скольжения:
1 – вал; 2 – вкладыш (втулка); 3 – обойма (корпус)

Примем допущение об однородности распределения температуры по длине подшипников и корпусов, поскольку теплоотдача от их торцевых поверхностей незначительна. Тогда в пределах зон контакта со втулками распределения температур на поверхности вала по осевой координате также необходимо считать однородными и определять путем осреднения истинного распределения. Подобное допущение не приведет к значительным погрешностям при расчетах температур. Действительно, результаты расчетов показывают, что при длине втулки 2 см разница между максимальной и минимальной температурой по осевой координате составляет 1-2°C [1]. Отклонение истинной температуры поверхности вала от осредненной в пределах длины втулки не превысит 0,5 °C.

По угловой координате в зонах контакта вала со втулками распределения температур будут неоднородными. Вне зоны контакта вала распределение температур будет неоднородным по угловой и осевой переменной. Таким образом, на поверхности вала при выходе из контакта со втулками распределение температуры по осевой координате становится неоднородным. Несмотря на то, что температура во втулках не меняется по осевой координате, при моделировании теплового процесса в подшипниках скольжения необходимо учесть трение вала по длине втулок, задавая условие теплообразования по всей зоне контакта.

Считая радиус вала и внутренние радиусы втулок близкими по значению, величиной эксцентриситета будем пренебрегать. Распределение температуры $U(r, \varphi, z, t)$ в вале будем рассматривать в неподвижной цилиндрической системе координат (r, φ, z) . Пусть угловое перемещение точек θ вращающегося вала относительно неподвижной системы координат (r, φ, z) описывается уравнением $\theta = \varphi + \phi(t)$. Тогда угловая координата φ в неподвижной системе координат удовлетворяет равенству $\varphi = \theta - \phi(t)$. Следовательно, полная производная по времени определяется выражением $\frac{DU}{Dt} = \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial \varphi} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t} - \Omega(t) \frac{\partial U}{\partial \varphi}$. Таким образом, уравнение теплопроводности для вала в неподвижной системе координат содержит конвективный член $\Omega(t)C_1(U) \frac{\partial U}{\partial \varphi}$, учитывающий вращение вала.

При принятых допущениях нестационарное распределение температуры в подшипниках скольжения описывается двумерными квазилинейными уравнениями теплопроводности:

$$C_{i,k}(T_k) \frac{\partial T_k}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda_{i,k}(T_k) \frac{\partial T_k}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\lambda_{i,k}(T_k) \frac{\partial T_k}{\partial \varphi} \right), \quad (1)$$

$$R_{2,k} < r < R_{4,k}, -\pi < \varphi < \pi, 0 < t \leq t_m, k = \overline{1, N}, i = 2, 3.$$

$i = 2$ – для втулки, $i = 3$ – для обоймы.

Для вала динамика температурного поля описывается трехмерным уравнением теплопроводности с конвективным членом:

$$\begin{aligned} C_1(U) \frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda_1(U) \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\lambda_1(U) \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) + \\ &+ \Omega C_1(U) \frac{\partial U}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_1(U) \frac{\partial U}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

$$0 < r < R_1, -\pi < \varphi < \pi, 0 < t \leq t_m.$$

В зонах трения подшипников с валом задаются условия фрикционного теплообразования:

$$\frac{\lambda_1(U)}{d_k} \int_{L_{2k-1}}^{L_{2k}} \frac{\partial U(r, \varphi, z, t)}{\partial r} dz \Big|_{r=R_1} - \lambda_2(T_k) \frac{\partial T_k(r, \varphi, t)}{\partial r} \Big|_{r=R_{2,k}} = Q_k(\varphi, t), \quad |\varphi| \leq \varphi_0, \quad (3)$$

$$\frac{1}{d_k} \int_{L_{2k-1}}^{L_{2k}} U(R_1, \varphi, z, t) dz = T_k(R_{2,k}, \varphi, t). \quad (4)$$

На свободных поверхностях вала, втулок и обойм G задаются условия конвективного теплообмена:

$$\lambda_1(U) \frac{\partial U(r, \varphi, z, t)}{\partial n} \Big|_G = \alpha(U(R_G, \varphi, z, t) - T_0), \quad (5)$$

В центре вала задается условие ограниченности решения:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(r \lambda_1(U) \frac{\partial U}{\partial r} \right) = 0. \quad (6)$$

По угловой координате выполняются условия периодичности:

$$\frac{\partial T_k(r, \varphi, t)}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=-\pi} = \frac{\partial T_k(r, \varphi, t)}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\pi}, \quad T_k(r, -\pi, t) = T_k(r, \pi, t), \quad (7)$$

$$\frac{\partial U(r, \varphi, z, t)}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=-\pi} = \frac{\partial U(r, \varphi, z, t)}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\pi}, \quad U(r, -\pi, z, t) = U(r, \pi, z, t). \quad (8)$$

Начальное распределение температуры в системе подшипников будем считать однородным и постоянным:

$$T_k(r, \varphi, 0) = U(r, \varphi, z, 0) = T_0. \quad (9)$$

При заданных функциях удельной интенсивности теплообразования $Q_k(\varphi, t)$, $k = \overline{1, N}$ определение температурного поля в системе подшипников представляет прямую задачу, которая решалась методом конечных разностей [2].

Вычислительными экспериментами определен шаг по времени обеспечивающий сходимость решения. Варьировалось число Куранта – Фридрихса – Леви ($\gamma = \tau \nu / h_\varphi$, $\nu = R_1 \Omega$), характеризующее связь шага по угловой переменной со скоростью движения вала и шагом по времени [3]. Поскольку для всех подшипников скольжения вращающийся вал является общим, достаточно рассмотреть случай одного подшипника. В последующем найденный таким образом шаг по времени будет использован для расчетов температур в системе с несколькими подшипниками.

Рис. 2. Расчетные зависимости максимальных температур в зоне трения при различных числах Куранта – Фридрихса – Леви γ , ($\gamma = \tau \nu / h_\varphi$, $\nu = R_1 \Omega$)

Поскольку для всех подшипников скольжения вращающийся вал является общим, достаточно рассмотреть случай одного подшипника. В последующем найденный таким образом шаг по времени будет использован для расчетов температур в системе с несколькими подшипниками.

На рис.2 представлены результаты расчетов температур в подшипнике скольжения в зависимости от числа Куранта – Фридрихса – Леви при следующих геометрических размерах: $R_1 = 0,0012$ м, $R_{2,k} = 0,00125$ м, $R_{3,k} = 0,0016$ м, $R_{4,k} = 0,003$ м, $k = 1$. Материалом для вала и обоймы служит сталь, а для втулки – наполненный фторопласт Ф4К20. Скорость вращения вала 30 об/мин, угол контакта – 30°. Удельная интенсивность тепловыделения постоянна и равна $Q = 67 \frac{\text{кВт}}{\text{м}^2}$.

Расчеты показывают, что при $\gamma < 1$ решения сходятся. Для практических расчетов шаг по времени можно определить из условия $\gamma = 2$, поскольку разница максимальных

температур в каждый момент времени при любых двух значениях $\gamma < 2$ составит менее одного градуса.

1. Флоке А., Плей Д. Температуры в зоне контакта в несмазываемых подшипниках. Трехмерная теория и ее проверка // Проблемы трения и смазки, 1981, №2. – С. 61-71.
2. Самарский А.А. Теория разностных схем.- М.: Наука. – 1977. – 656 с.
3. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы // М.: Наука, 1977. – 440 с.