Герасименко Е.Ю., Петренко А.И., Кобец В.А.
*Донской Государственный Технический Университет
Ростов-на-Дону, Россия*

doi: 10.18411/lj-30-11-2016-3-05
idsp 000001:lj-30-11-2016-3-05

Краевые задачи электромассотеплопереноса в электрохимическом сопротивлении с двухэлектродным управлением

Аннотация

В данной работе определяются краевые задачи электромассотеплопереноса в электрохимическом сопротивлении с двухэлектродным управлением, было найдено распределение плотности тока, которое дает возможность найти распределение осажденного металла.

Ключевые слова: Электромассотеплоперенос, математическая модель, угольный электрод.

Рассматриваемая в работе математическая модель управляемого электрохимического сопротивления, построенная на основе исследования в нем физических полей. Данная методика расчета плотности тока на границе раздела фаз, позволяет оценить распределение электрохимического осаждения металла и учесть влияние на это управляющего тока.

Управляемое электрохимическое сопротивление (УЭХС) представляет собой устройство (рис.1), состоящее из диэлектрической емкости, в которой находится угольный электрод и две медные пластины(управляющие электроды).Здесь I_1 – рабочий ток в основной цепи угольной пластины; I_{21} и I_{22} - токи управления. Под действием токов I_{21} и I_{22} на границах раздела «электрод-электролит» выделяется некоторый слой меди. Толщина этого слоя зависит от искомого распределения плотности тока $\delta(x;t)$ и времени.

Рис. 1. - Устройство и схема включения УЭХС

Рис. 2. -Расчетный модуль УЭХС

В работе рассмотрена модель УЭХС с неравномерным распределением плотности тока на границе раздела «угольный электрод-электролит». Были совместно рассмотрены концентрационное поле электролита и электрические поля в электролите и угольном электроде.

В ходе моделирования рассматриваемого устройства принимаются следующие физические допущения: электрические поля в электролите и угольном электроде-потенциальные; все физико-химические характеристики системы являются постоянными величинами; все физические поля являются плоскопараллельными и зависят от двух координат- x и y ; электродная кинетика контролируется стадией молекулярной диффузии в электролите.

Данные математические модели концентрационного поля электролита $C(x,y,t)$, электрического поля в электролите $\phi(x,y,t)$ и электрического поля в угольном электроде $\phi_c(x,y,t)$. Краевые задачи для всех рассматриваемых полей решались оперативным методом Лапласа.

Следует к тому, чтобы точки управления I_{21} и I_{22} , были равными, т.е. $I_{21}=I_{22}=I_2$.

Если при этом окажется, что одинаковыми будут и толщины слоев электролита, то при моделировании УЭХС можно рассматривать лишь нижнюю половину конструкции относительно горизонтальной оси симметрии (Рисунок 2)

Концентрация электролита $C(x,y,t)$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \left(D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right), x \in [0; l], y \in [0; h] \quad (1)$$

$$C(x,y,t)=C_0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial C}{\partial x}(0; y; t), y \in [0; h], \quad (3)$$

$$\frac{\partial C}{\partial x}(l; y; t), y \in [0; h] \quad (4)$$

$$\frac{\partial C}{\partial y}(x; 0; t) = \frac{NI_2 t}{ls} = M I_2(t), x \in [0; l] \quad (5)$$

$$\frac{\partial C}{\partial y}(x; h; t) = N\delta(x; t), x \in [0; l] \quad (6)$$

$\delta(x; t)$ —подлежит определению при заданных $I_1(t)$ и $I_2(t)$.

Электрическое поле в электролите $\varphi_3(x; y; t)$

$$\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2} = 0, x \in [0; l], y \in [0; h] \quad (7)$$

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial x}(0; y; t) = 0, y \in [0; h] \quad (8) \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial x}(l; y; t) = 0, y \in [0; h] \quad (9)$$

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial y}(x; 0; t) = \frac{-I_2(t)}{lS\gamma}, x \in [0; l] \quad (10)$$

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial y}(x; h; t) = -\frac{\delta(x; t)}{\gamma}, x \in [0; l] \quad (11)$$

Электрическое поле в угольном электроде $\varphi_c(x; y; t)$

$$\frac{\partial^2 \varphi_c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_c}{\partial y^2} = 0, x \in [0; l], y \in \left[h; h + \frac{r}{2}\right] \quad (12)$$

$$\frac{\partial \varphi_c}{\partial x}(0; y; t) = -\frac{\frac{I_1(t)}{2} - I_2(t)}{rS\gamma_c}, y \in \left[h; h + \frac{r}{2}\right] \quad (13)$$

$$\frac{\partial \varphi_c}{\partial x}(l; y; t) = -\frac{\frac{I_1(t)}{2}}{rS\gamma_c}, y \in \left[h; h + \frac{r}{2}\right] \quad (14)$$

$$\frac{\partial \varphi_c}{\partial y}\left(x; h + \frac{r}{2}; t\right) = 0, x \in [0; l] \quad (15)$$

Где D -коэффициент диффузии, C_0 - начальная концентрация, N -электрохимическая константа, γ_c -удельная электропроводность угольного электролита, S -размер системы в направлении, перпендикулярном плоскости чертежа.

Решением задачи (1)-(6) является функция

$$^{\circ}C(x; y; p) = \left(\frac{N}{\sqrt{lS\sqrt{\frac{p}{D}}}} \cdot {}^{\circ}I_2(p) \frac{sh\sqrt{\frac{p}{D}}\left(y - \frac{h}{2}\right)}{ch\sqrt{\frac{p}{D}}h} + \frac{{}^{\circ}C}{p}\sqrt{l} \right) \frac{1}{\sqrt{l}} + N \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega_k(p)ch\sqrt{\frac{p}{D} + \frac{k^2\pi^2}{l^2}}y}{\sqrt{\frac{p}{D} + \frac{k^2\pi^2}{l^2}}sh\sqrt{\frac{p}{D} + \frac{k^2\pi^2}{l^2}}h} X_k(x), y \in [0; h] \quad (16)$$

Задачи (7)-(11)-функция

$$^{\circ}\varphi_3(x; y; p) = \left(\frac{{}^{\circ}I_2(p)}{lS\gamma_3}\sqrt{l}y + \beta_0(p) \right) \frac{1}{\sqrt{l}} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{{}^{\circ}\omega_k(p)ch\frac{k\pi}{l}y}{\gamma_3\frac{k\pi}{l}sh\frac{k\pi}{l}h} X_k(x), y \in [0; h] \quad (17)$$

И задачи (12)-(15)-функция

$$\begin{aligned} \omega_c(x; y; p) = & \left(\frac{{}^{\circ}I_2(p)}{rS\gamma_c\sqrt{l}}y^2 - \frac{2^{\circ}I_2(p)\left(h + \frac{r}{2}\right)}{rS\gamma_c\sqrt{l}}y + b_0(p) \right) \frac{1}{\sqrt{l}} - \frac{{}^{\circ}I_2(p)}{rS\gamma_cl}x^2 \\ & - \frac{{}^{\circ}I_1(p) - 2^{\circ}I_2(p)}{rS\gamma_c}x + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(p) \frac{ch\frac{k\pi}{l}\left(h + \frac{r}{2} - y\right)}{ch\frac{k\pi}{l}\left(h + \frac{r}{2}\right)} X_k(x), \\ & y \in \left[h; h + \frac{r}{2}\right]. \quad (18) \end{aligned}$$

Здесь неизвестными остаются константы: $\beta_0(p)$; $b_0(p)$; $b_k(p)$,

$$\omega_k(p) = \int_0^l \delta(x; p) X_k(x) dx, \text{ где } X_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{l}}, k = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \frac{k\pi}{l} x, k \neq 0. \end{cases}$$

-собственные функции рассмотренных краевых задач.

Данные константы могут быть найдены из краевых условий сопряжения на границе раздела «медь-электролит»:

Условия непрерывности плотности электрического тока:

$$-\gamma_c \frac{\partial \varphi_c(x; h; p)}{\partial y} = -\gamma_a \frac{\partial \varphi_a(x; h; p)}{\partial y},$$

Скачок электрического потенциала-уравнения Нернста-на границе раздела фаз:

$$\varphi_c(x; h; p) - \varphi_a(x; h; p) = g_{10} + g_{11} \varphi_c(x; h; p),$$

Где $g_{10} > 0$, $g_{11} > 0$ –коэффициенты линейной аппроксимации уравнений Нернста.

В результате определения всех коэффициентов разложения можно найти распределение плотности тока на границе раздела фаз по закону Ома.

$$\delta(x; p) = -\gamma_a \frac{\partial \varphi_a(x; h; p)}{\partial y}, \text{ где } \varphi_a(x; h; p) \text{ – определяется из (17).}$$

$$\text{Конкретно получим } \delta(x; p) = \frac{i_2(p)}{l s} \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k(p) X_k(x).$$

Найденное распределение плотности тока дает возможность найти распределение осажденного металла на поверхности угольного электрода и тем самым оценить влияние управляющего тока $i_2(p)$ на величину УЭХС.

Литература

1. Герасименко Ю.Я. Математическое моделирование физических полей в электрохимических системах.-Новочеркасск: НПИ.- 1980. 88с.