Герасименко Е.Ю., Мерабян М.А., Переходов М.В.
*Донской Государственный Технический Университет
Ростов-на-Дону, Россия*

doi: 10.18411/lj-30-11-2016-3-04
idsp 000001:lj-30-11-2016-3-04

Математическое моделирование свинцово-кислотного аккумулятора как элемента электрической цепи

Аннотация

Математические модели, приведенные в данной работе, позволяют рассчитывать все основные разрядные и зарядные режимы работы аккумуляторной ячейке, заменить дорогостоящий эксперимент по короткому замыканию аккумулятора необходимыми алгоритмами и расчетами на ЭВМ, определить параметры электрической схемы замещения аккумулятора.

Ключевые слова: аккумуляторная ячейка, плоский электрод, молекулярно-гиперболическая диффузия, концентрационное поле.

Исследуется аккумуляторная ячейка (АЯ), которая состоит из двух плоских электродов противоположного знака площадью s , где расстояние между которыми равно l . Через ячейку проходит ток $I(t)$, при этом плотность тока по поверхности электродов распределена равномерно. Лимитирующей стадией электродных процессов в ячейке является молекулярно-гиперболическая диффузия в электролите, которая протекает с конечной скоростью $V = \sqrt{D/\tau_r}$, где D – коэффициент молекулярной диффузии; τ_r – постоянная релаксации.

Относительно концентрационного поля электролита $C(x;t)$ в ячейке была поставлена следующая начально-краевая задача на отрезке $[0;l]$:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \tau_r \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}; C(x; 0) = C_0; \frac{\partial C}{\partial t}(x; 0) = 0;$$

$$\frac{\partial C}{\partial x}(0; t) = N \frac{I(t)}{S}; \frac{\partial C}{\partial x}(l; t) = -N \frac{I(t)}{S},$$

где N – константа электродной реакции, C_0 – начальная концентрация электролита.

Решение данной задачи операторным методом Лапласа приводит к изображению $C(x;p)$ концентрационного поля следующего типа:

$$C(x;p) = \frac{C_0}{p} - I(p) \frac{N}{S} \frac{ch(\sqrt{p(1+\tau_r p)/D}(x-l/2))}{\sqrt{p(1+\tau_r p)/D} \cdot sh(\sqrt{p(1+\tau_r p)/D} l/2)}, \quad (1)$$

где $I(p)$ – изображение по Лапласу тока $I(t)$.

Напряжение $U(p)$ на электродах ячейки в операторной форме по Лапласу имеет следующий вид [1]:

$$U(p) = \Delta^+(p) - \Delta^-(p) - I(p)r_3, \quad (2)$$

где $r_3 = \rho_3 l/S$ – сопротивление столба электролита.

Изображения скачков потенциалов на электродах определяются следующими соотношениями

$$\Delta^+(p) = g_{10}/p + g_{11} C(l;p), \quad (3)$$

$$\Delta^-(p) = g_{20}/p + g_{21} C(l;p), \quad (4)$$

где $g_{10} > 0, g_{11} > 0, g_{20} < 0, g_{21} < 0$ – параметры линейной аппроксимации уравнений Нернста для электродов аккумуляторной ячейки.

Из формулы (1) находим

$$C(l;p) = \frac{C_0}{p} - I(p) \frac{N}{S} \frac{cth(\sqrt{p(1+\tau_r p)/D} l/2)}{\sqrt{p(1+\tau_r p)/D}}, \quad (5)$$

$$C(l;p) = \frac{C_0}{p} - I(p) \frac{N}{S} \frac{cth(\sqrt{p(1+\tau_r p)/D} l/2)}{\sqrt{p(1+\tau_r p)/D}} \quad (6)$$

Подстановка (5),(6) в (3) и (4) дает следующий результат:

$$\Delta^+(p) = \frac{g_{10}}{p} + \frac{g_{11}C_0}{p} - I(p) \frac{g_{11}N}{S} \frac{cth(\sqrt{p(1+\tau_r p)/D} l/2)}{\sqrt{p(1+\tau_r p)/D}},$$

$$\Delta^-(p) = \frac{g_{20}}{p} + \frac{g_{21}C_0}{p} - I(p) \frac{g_{21}N}{S} \frac{cth(\sqrt{p(1+\tau_r p)/D} l/2)}{\sqrt{p(1+\tau_r p)/D}},$$

Подставляем последние формулы в (2)

$$U(p) = \frac{(g_{10}-g_{20})+(g_{11}-g_{21})C_0}{p} - I(p) \frac{(g_{11}-g_{21})N}{S} \frac{cth(\sqrt{p(1+\tau_r p)/D} l/2)}{\sqrt{p(1+\tau_r p)/D}} - I(p)r_{\Sigma}, \quad (7)$$

Если в (3) принять $I(p) = I_0(p)$, соответствующий постоянному току разряда I_0 , то получим изображение разрядной кривой

$$U(p) = \frac{E_0}{p} - \frac{I_0(p)}{p} \frac{(g_{11}-g_{21})N}{S} \frac{cth(\sqrt{p(1+\tau_r p)/D} l/2)}{\sqrt{p(1+\tau_r p)/D}} - \frac{I_0(p)}{p} r_{\Sigma}, \quad (8)$$

где $E_0 = (g_{10} - g_{20}) + (g_{11} - g_{21})C_0$ – начальная э.д.с. АЯ.

Уравнения (7), (8) могут быть применены расчета кривой тока разряда ячейки на заданный вид нагрузки. Например, при разряде аккумуляторной ячейки на омическое сопротивление R_H величина разрядного напряжения

$U(p)$ определяется как $U(p) = I(p)R_H$. Подставляя эту формулу в левую часть (7):

$$I(p)R_H = \frac{E_0}{p} - I(p) \frac{(g_{11}-g_{21})N}{S} \frac{cth(\sqrt{p(1+\tau_r p)/D} l/2)}{\sqrt{p(1+\tau_r p)/D}} - I(p)r_{\Sigma}, \quad (9)$$

Отсюда легко найти отображение разрядного тока $I(p)$ на постоянное омическое сопротивление

$$I(p) = E_0 / \left(\frac{(g_{11}-g_{21})N}{S} \frac{cth(\sqrt{p(1+\tau_r p)/D} l/2)}{\sqrt{p(1+\tau_r p)/D}} \right) + r_{\Sigma} + R_H,$$

Зависимость (9) при $R_H = 0$ допускает возможность расчета кривой тока короткого замыкания аккумуляторной ячейки. Кривая оригинала $I(t)$, соответствующая выражению $U(p) = I(p)R_H$, может быть реализована только численно.

Математические модели, приведенные в данной работе, позволяют рассчитывать все основные разрядные и зарядные режимы работы аккумуляторной ячейке, заменить дорогостоящий эксперимент по короткому замыканию аккумулятора необходимыми алгоритмами и расчетами на ЭВМ, определить параметры электрической схемы замещения аккумулятора.

Литература

1. Привалов И.И. Введение в теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1997