РАЗДЕЛ IV. МАТЕМАТИКА

Бадриев И.Б., Буянов В.Ю., Макаров М.В.

Производная Гато оператора геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины

Казанский (Приволжский) федеральный университет
(Россия, Казань)

doi: 10.18411/lj-30-09-2017-19

idsp: 000001:lj-30-09-2017-19

Аннотация

Найдена производная Гато оператора геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем в одномерной постановке.

Ключевые слова. Трехслойная пластина, трансверсально-мягкий заполнитель, геометрическая нелинейность, производная Гато.

Введение.

Слоистые конструкции, в частности, трехслойные пластинки и оболочки (рис. 1), находят применение в различных областях техники (авиастроении, судостроении и др.). Трехслойные конструкции обладают многими качествами, которых нет у обычных конструкций, выполненных только из металла. Они имеют высокую удельную жесткость и могут выдержать большие удельные нагрузки. Слоистые пластины и оболочки обладают хорошими тепло и звукоизоляционными качествами, демпфирующими вибропоглощающими свойствами. [1–7].

Рис. 1. Трехслойная конструкция. Заполнители: 1 – пенопласт; 2 – гофр; 3 – соты.

Данная работа является продолжением [8–13] и посвящена нахождению производной Гато [14] оператора геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем, сформулированной в виде операторного уравнения в пространстве Соболева. Обобщенные постановки физически нелинейных и геометрически линейных задач рассмотрены в [15–19]. Нелинейные задачи теории мягких сетчатых оболочек изучены в [20–28]. Численное решение геометрически нелинейных задач проведено в [29–35].

1. Постановка задачи.

Изучаются задачи определения напряженно-деформированного состояния (НДС) бесконечно широких трехслойных пластин с трансверсально-мягким заполнителем.

Длина пластины равна a , толщина заполнителя $2t$, толщины несущих слоев есть $2t_{(k)}$, k – номер слоя. Для описания НДС в несущих слоях используются уравнения модели Кирхгофа-Лява, в заполнителе – уравнения теории упругости, упрощенные в рамках принятой модели трансверсально-мягкого слоя и проинтегрированных по толщине с удовлетворением условий сопряжения слоев по перемещениям [36, 37]. Введем

следующие обозначения: $H_{(k)} = t + t_{(k)}$ (здесь и в дальнейшем полагаем, что $k=1, 2$),

$X_{(k)}^1, X_{(k)}^3$ – компоненты поверхностной нагрузки, приведенной к срединной поверхности k -го слоя, $w^{(k)}$ и $u^{(k)}$ – прогибы и осевые перемещения точек срединной поверхности k -го слоя, $T_{(k)}^{11}, M_{(k)}^{11}$ – мембранные усилия и внутренние изгибающие моменты в k -м слое соответственно. Считаем, что края пластины закреплены, т.е. $u^{(k)}(x) = 0, w^{(k)}(x) = 0, dw^{(k)}/dx = 0$ при $x = 0, x = a$. Рассматриваем геометрически нелинейный случай: $T_{(k)}^{11} = B_{(k)}(du^{(k)}/dx + 0.5(dw^{(k)}/dx)^2), M_{(k)}^{11} = D_{(k)}d^2u^{(k)}/dx^2$, где $B_{(k)} = 2t_{(k)}E^{(k)}/(1-\nu_{12}^{(k)}\nu_{21}^{(k)})$ – жесткость k -го слоя на растяжение–сжатие, $E^{(k)}$ и $\nu_{12}^{(k)}, \nu_{21}^{(k)}$ – модуль упругости 1-го рода и коэффициенты Пуассона материала k -го слоя, $D_{(k)} = B_{(k)}h_{(k)}^2/3$ – изгибная жесткость k -го слоя. Пусть $U = (w^{(1)}, w^{(2)}, u^{(1)}, u^{(2)})$ – вектор перемещений точек срединных поверхностей несущих слоев, q^1 – касательные напряжения в заполнителе. Для q^1 предполагаем выполненными граничные условия $q^1(0) = q^1(a) = 0$. Пусть G_{13}, E_3 – модули поперечного сдвига и обжатия заполнителя, $c_1 = 2t/G_{13}, c_2 = t^3/(3E_3), c_3 = E_3/(2t), M_{(k)}^1$ – поверхностный момент внешних сил, приведенный к срединной поверхности k -го слоя. Предполагаем, что все постоянные $a, G_{13}, E_3, t, E^{(k)}, \nu_{12}^{(k)}, \nu_{21}^{(k)}, t_{(k)}$ положительны.

2. Обобщенная постановка задачи в виде операторного уравнения.

Пусть $V_k = \overset{o}{W}_2^{(k)}(0, a)$ – пространства Соболева [38] со скалярными произведениями $(u, \eta)_k = \int_0^a dx^k u/dx^k dx^k \eta/dx^k dx^k, k=1, 2, V = V_2 \times V_2 \times V_1 \times V_1$. Будем обозначать скалярное произведение в V через $(\cdot, \cdot)_V$. В [9, 10] установлено, что решением рассматриваемой задачи есть элемент (U, q^1) , являющийся решением вариационного уравнения

$$b((U, q^1), (Z, y)) = f(Z) \quad \forall (Z, y) \in W = V \times V_1, \quad (1)$$

где форма $b(\cdot, \cdot)$ и функционал f , заданные на $W \times W$ и V , определяются по формулам

$$\begin{aligned} b((U, q^1), (Z, y)) = & \int_0^a \sum_{k=1}^2 B_{(k)} \left[\frac{du^{(k)}}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw^{(k)}}{dx} \right)^2 \right] \frac{d\eta^{(k)}}{dx} dx + \\ & + c_3 \int_0^a (w^{(2)} - w^{(1)})(z^{(2)} - z^{(1)}) dx + \int_0^a \left\{ \sum_{k=1}^2 H_{(k)} \frac{dz^{(k)}}{dx} + (\eta^{(2)} - \eta^{(1)}) \right\} q^1 dx + \\ & + \int_0^a \left\{ \left[\sum_{k=1}^2 H_{(k)} \frac{dw^{(k)}}{dx} + (u^{(2)} - u^{(1)}) + c_1 q^1 \right] y + c_2 dq^1/dx dy/dx \right\} dx = 0 \\ & \forall Z = (z^{(1)}, z^{(2)}, \eta^{(1)}, \eta^{(2)}) \in V, \quad \forall y \in V \end{aligned} \quad (2)$$

$$f(Z) = \int_0^a \sum_{k=1}^2 [X_{(k)}^1 \eta^{(k)} + M_{(k)}^1 \frac{dz^{(k)}}{dx} + X_{(k)}^3 z^{(k)}] dx \quad \forall Z \in V. \quad (3)$$

В [10] установлено, что форма $b(\cdot, \cdot)$, задаваемая (2), порождает оператор $A: W \rightarrow W$, определяемый формулой

$$b((U, q^1), (Z, y)) = (A(U, q^1), (Z, y))_W \quad \forall (Z, y) \in W, \quad (4)$$

где $(\cdot, \cdot)_W$ – скалярное произведение в W , а функционал f , задаваемый (3), порождает элемент $F \in V$, определяемый формулой $(F, Z)_V = f(Z)$ для всех $Z \in V$.

Поэтому задача (1) может быть записана в виде операторного уравнения

$$A(U, q^1) = (F, 0). \quad (5)$$

3. Производная Гато оператора уравнения.

При вычислении производной Гато нам потребуется следующая теорема [38, стр. 68].

Теорема 1. Пусть $\Omega \subset R^n$ – ограниченная область с регулярной границей Γ и $1 \leq p < \infty$. Тогда $W_p^{(k)}(\Omega) \subset W_r^{(j)}(\Omega)$ для $0 \leq j < k$ и каждого r , удовлетворяющего условию $1/p - (k - j)/n \leq 1/r < 1$; кроме того, для любой функции $u \in W_p^{(k)}(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\|u\|_{j,r} \leq C_{jr}^{kp} \|u\|_{k,p}, \quad (6)$$

где $\|\cdot\|_{k,p}$ – норма в $W_p^{(k)}(\Omega)$, а постоянная C_{jr}^{kp} зависит от Ω, j, k, p, r .

Вычислим производную Гато оператора A , определяемого (2), (4). Обозначим $U = (w^{(1)}, w^{(2)}, u^{(1)}, u^{(2)})$, $\hat{U} = (\hat{w}^{(1)}, \hat{w}^{(2)}, \hat{u}^{(1)}, \hat{u}^{(2)})$, $Z = (z^{(1)}, z^{(2)}, \eta^{(1)}, \eta^{(2)})$. Тогда

$$\begin{aligned} (A(U + t\hat{U}, q^1 + t\hat{q}^1) - A(U, q^1), (Z, y))_W = & \int_0^a \sum_{k=1}^2 B_{(k)} \left\{ \left[\frac{du^{(k)}}{dx} + t \frac{d\hat{u}^{(k)}}{dx} + \right. \right. \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{dw^{(k)}}{dx} + t \frac{d\hat{w}^{(k)}}{dx} \right)^2 \left. \right] - \left[\frac{du^{(k)}}{dx} + \left(\frac{dw^{(k)}}{dx} \right)^2 \right] \frac{d\eta^{(k)}}{dx} dx + \int_0^a \sum_{k=1}^2 B_{(k)} \left\{ \left[\frac{du^{(k)}}{dx} + \right. \right. \\ & + t \frac{d\hat{u}^{(k)}}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw^{(k)}}{dx} \right)^2 + t \frac{dw^{(k)}}{dx} \frac{d\hat{w}^{(k)}}{dx} + \frac{t^2}{2} \left(\frac{d\hat{w}^{(k)}}{dx} \right)^2 \left. \right] \left(\frac{dw^{(k)}}{dx} + t \frac{d\hat{w}^{(k)}}{dx} \right) - \\ & \left[\frac{du^{(k)}}{dx} - \frac{1}{2} \left(\frac{d\hat{w}^{(k)}}{dx} \right)^2 \right] \frac{dw^{(k)}}{dx} \left. \right\} \frac{dz^{(k)}}{dx} dx + \int_0^a \sum_{k=1}^2 D_{(k)} \left[\left(\frac{d^2 w^{(k)}}{dx^2} + t \frac{d^2 \hat{w}^{(k)}}{dx^2} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{d^2 w^{(k)}}{dx^2} \right] \frac{d^2 z^{(k)}}{dx^2} dx + c_3 \int_0^a [(w^{(2)} + t\hat{w}^{(2)} - w^{(1)} - t\hat{w}^{(1)}) - (w^{(2)} - w^{(1)})] \times \\ & \times \sum_{k=1}^2 (2k - 3) z^{(k)} dx + \int_0^a \left[\sum_{k=1}^2 H_{(k)} \frac{dz^{(k)}}{dx} + (\eta^{(2)} - \eta^{(1)}) \right] (q^1 + t\hat{q}^1 - q^1) dx + \\ & + \int_0^a \left[\sum_{k=1}^2 H_{(k)} \left(\frac{dw^{(k)}}{dx} + t \frac{d\hat{w}^{(k)}}{dx} \right) + (u^{(2)} + t\hat{u}^{(2)} - u^{(1)} + t\hat{u}^{(1)}) - \right. \\ & \left. - \sum_{k=1}^2 H_{(k)} \left(\frac{dw^{(k)}}{dx} \right) - (u^{(2)} - u^{(1)}) \right] y dx + c_1 \int_0^a (q^1 + t\hat{q}^1 - q^1) y dx + \\ & + c_2 \int_0^a \left(\frac{dq^1}{dx} + t \frac{d\hat{q}^1}{dx} - \frac{dq^1}{dx} \right) \frac{dy}{dx} dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= t \int_0^a \sum_{k=1}^2 B_{(k)} \left(\frac{d\hat{u}^{(k)}}{dx} + \frac{dw^{(k)}}{dx} \frac{d\hat{w}^{(k)}}{dx} \right) \frac{d\eta^{(k)}}{dx} dx + \frac{t^2}{2} \int_0^a \sum_{k=1}^2 B_{(k)} \left(\frac{d\hat{w}^{(k)}}{dx} \right)^2 \frac{d\eta^{(k)}}{dx} dx + \\
&+ t \int_0^a \sum_{k=1}^2 B_{(k)} \left\{ \left[\frac{du^{(k)}}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw^{(k)}}{dx} \right)^2 \right] \frac{d\hat{w}^{(k)}}{dx} + \left(\frac{d\hat{u}^{(k)}}{dx} + \frac{dw^{(k)}}{dx} \frac{d\hat{w}^{(k)}}{dx} \right) \frac{dw^{(k)}}{dx} \right\} \times \\
&\times \frac{dz^{(k)}}{dx} dx + t^2 \int_0^a \sum_{k=1}^2 B_{(k)} \left[\left(\frac{d\hat{u}^{(k)}}{dx} + \frac{dw^{(k)}}{dx} \frac{d\hat{w}^{(k)}}{dx} \right) \frac{d\hat{w}^{(k)}}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\hat{w}^{(k)}}{dx} \right)^2 \frac{dw^{(k)}}{dx} \right] \times \\
&\times \frac{dz^{(k)}}{dx} dx + \frac{t^3}{2} \int_0^a \sum_{k=1}^2 B_{(k)} \left(\frac{d\hat{w}^{(k)}}{dx} \right)^3 \frac{d\hat{w}^{(k)}}{dx} \frac{dz^{(k)}}{dx} dx + t \int_0^a \sum_{k=1}^2 D_{(k)} \frac{d^2 \hat{w}^{(k)}}{dx^2} \frac{d^2 z^{(k)}}{dx^2} dx + \\
&+ tc_3 \int_0^a (\hat{w}^{(2)} - \hat{w}^{(1)}) \sum_{k=1}^2 (2k-3) z^{(k)} dx + t \int_0^a \left[\sum_{k=1}^2 H_{(k)} \frac{dz^{(k)}}{dx} + (\eta^{(2)} - \eta^{(1)}) \right] \hat{q}^1 dx + \\
&+ t \int_0^a \left[\sum_{k=1}^2 H_{(k)} \frac{d\hat{w}^{(k)}}{dx} + (\hat{u}^{(2)} - \hat{u}^{(1)}) \right] y dx + tc_1 \int_0^a \hat{q}^1 y dx + tc_2 \int_0^a \frac{d\hat{q}^1}{dx} \frac{dy}{dx} dx.
\end{aligned}$$

Из (6) вытекает следующее неравенство

$$\|w^{(k)}\|_{1,4} \leq C_{14}^{22} \|\hat{w}^{(k)}\|_{2,2}, \quad (7)$$

из которого следует, что

$$\left| \int_0^a \left(\frac{d\hat{w}^{(k)}}{dx} \right)^2 \frac{d\eta^{(k)}}{dx} dx \right| \leq \|\eta^{(k)}\|_{1,2} \|\hat{w}^{(k)}\|_{1,4}^2 \leq (C_{14}^{22})^2 \|\eta^{(k)}\|_{1,2} \|\hat{w}^{(k)}\|_{2,2}^2. \quad (8)$$

Применяя обобщенное неравенства Гельдера с показателями 2, 4, 4 (см., например, [39]), а затем – неравенство (7), получаем

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^a \frac{d\hat{u}^{(k)}}{dx} \frac{d\hat{w}^{(k)}}{dx} \frac{dz^{(k)}}{dx} dx \right| &\leq \|\hat{u}^{(k)}\|_{1,2} \|\hat{w}^{(k)}\|_{1,4} \|z^{(k)}\|_{1,4} \leq \\
&\leq (C_{14}^{22})^2 \|\hat{u}^{(k)}\|_{1,2} \|\hat{w}^{(k)}\|_{2,2} \|z^{(k)}\|_{2,2}.
\end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^a \left(\frac{d\hat{w}^{(k)}}{dx} \right)^2 \frac{dw^{(k)}}{dx} \frac{dz^{(k)}}{dx} dx \right| &\leq \|\hat{w}^{(k)}\|_{1,4}^2 \|w^{(k)}\|_{1,4} \|z^{(k)}\|_{1,4} \leq \\
&\leq (C_{14}^{22})^4 \|\hat{w}^{(k)}\|_{2,2}^2 \|w^{(k)}\|_{2,2} \|z^{(k)}\|_{2,2}.
\end{aligned} \quad (10)$$

Из неравенств (7) и Гельдера с показателями 4 и 4/3 вытекает, что

$$\left| \int_0^a \left(\frac{d\hat{w}^{(k)}}{dx} \right)^3 \frac{dz^{(k)}}{dx} dx \right| \leq \|\hat{w}^{(k)}\|_{1,4}^3 \|z^{(k)}\|_{1,4} \leq (C_{14}^{22})^4 \|\hat{w}^{(k)}\|_{2,2}^3 \|z^{(k)}\|_{2,2}. \quad (11)$$

Из неравенств (8)–(11) следует, что для всех $(U, q^1), (\hat{U}, \hat{q}^1), (Z, y)$ из W существует

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(A(U+t\hat{U}, q^1+t\hat{q}^1) - A(U, q^1), (Z, y))_W}{t} &= \int_0^a \sum_{k=1}^2 B_{(k)} \left(\frac{d\hat{u}^{(k)}}{dx} + \frac{dw^{(k)}}{dx} \frac{d\hat{w}^{(k)}}{dx} \right) \times \\
&\times \frac{d\eta^{(k)}}{dx} dx + \int_0^a \sum_{k=1}^2 B_{(k)} \left\{ \left[\frac{du^{(k)}}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw^{(k)}}{dx} \right)^2 \right] \frac{d\hat{w}^{(k)}}{dx} + \left(\frac{d\hat{u}^{(k)}}{dx} + \frac{dw^{(k)}}{dx} \frac{d\hat{w}^{(k)}}{dx} \right) \times \right. \\
&\times \left. \frac{dw^{(k)}}{dx} \right\} \frac{dz^{(k)}}{dx} dx + \int_0^a \sum_{k=1}^2 D_{(k)} \frac{d^2 \hat{w}^{(k)}}{dx^2} \frac{d^2 z^{(k)}}{dx^2} dx + c_3 \int_0^a (\hat{w}^{(2)} - \hat{w}^{(1)}) \sum_{k=1}^2 (2k-3) z^{(k)} dx + \\
&+ \int_0^a \left[\sum_{k=1}^2 H_{(k)} \frac{dz^{(k)}}{dx} + (\eta^{(2)} - \eta^{(1)}) \right] \hat{q}^1 dx + \int_0^a \left[\sum_{k=1}^2 H_{(k)} \frac{d\hat{w}^{(k)}}{dx} + (\hat{u}^{(2)} - \hat{u}^{(1)}) \right] y dx + \\
&+ c_1 \int_0^a \hat{q}^1 y dx + c_2 \int_0^a \frac{d\hat{q}^1}{dx} \frac{dy}{dx} dx = (DA((U, q^1), (\hat{U}, \hat{q}^1)), (Z, y))_W.
\end{aligned}$$

(12)

Таким образом, для всех $(U, q^1), (\hat{U}, \hat{q}^1), (Z, y)$ из W

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{A(U+t\hat{U}, q^1+t\hat{q}^1) - A(U, q^1)}{t} - DA((U, q^1), (\hat{U}, \hat{q}^1)), (Z, y) \right)_W = 0.$$

(13)

В силу следствия из теоремы Хана-Банаха (см. [40]. Теорема 2.7.4) можно выбрать такой единичный вектор (Z, y) из W , что

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{A(U+t\hat{U}, q^1+t\hat{q}^1) - A(U, q^1)}{t} - DA((U, q^1), (\hat{U}, \hat{q}^1)), (Z, y) \right)_W = \\
&= \left\| \frac{A(U+t\hat{U}, q^1+t\hat{q}^1) - A(U, q^1)}{t} - DA((U, q^1), (\hat{U}, \hat{q}^1)) \right\|_W.
\end{aligned}$$

Отсюда и из соотношения (13) следует, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\| \frac{A(U+t\hat{U}, q^1+t\hat{q}^1) - A(U, q^1)}{t} - DA((U, q^1), (\hat{U}, \hat{q}^1)) \right\|_W = 0.$$

Нетрудно видеть, что оператор $DA((U, q^1), (\hat{U}, \hat{q}^1))$ линеен по $(\hat{U}, \hat{q}^1)$. Таким образом, $DA((U, q^1), (\hat{U}, \hat{q}^1)) = A'(U, q^1)(\hat{U}, \hat{q}^1)$, где $A'(U, q^1)$ – производная Гато оператора A в точке (U, q^1) . Таким образом, доказана

Теорема 2. Пусть оператор A порождается соотношениями (2), (4). Тогда он всюду дифференцируем по Гато, его производная Гато определяется соотношением (12).

4. Заключение.

Доказано, что оператор геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем дифференцируем по Гато и вычислена его производная Гато. В дальнейшем это свойство будет использовано при исследовании форм потери устойчивости пластины и нахождении критической нагрузки, при которой возникает потеря устойчивости. Будут разработаны приближенные методы решения указанной задачи на основе разработанных в [3, 41–66] подходов.

Публикация осуществлена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №№ 17-08-01279, 16-01-00301, 16-38-00788).

1. Васильев В.В., Добряков А.А., Дудченко А. А. Основы проектирования и изготовления конструкций летательных аппаратов из композиционных материалов. – М.: МАИ, 1985. – 218 с.
2. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Численное исследование физически нелинейной задачи о продольном изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2017. – № 1. – С. 39–51.
3. Макаров М.В., Бадриев И.Б., Паймушин В.Н. Нелинейные задачи о смешанных формах потери устойчивости трехслойных пластин при продольно-поперечном изгибе // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2015. – Т. 20, № 5. – С. 1275–1278.
4. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Решение нелинейных задач теории многослойных оболочек с трансверсально-мягким заполнителем // В сборнике: Сеточные методы для краевых задач и приложения Материалы Десятой Международной конференции, 2014. – С. 103–107.
5. Paimushin V.N. Problems of geometric non-linearity and stability in the mechanics of thin shells and rectilinear columns // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2007. – V. 71, № 5. – P. 772–805.
6. Paimushin V.N., Firsov V.A., Gyunal I., Egorov A.G. Theoretical-experimental method for determining the parameters of damping based on the study of damped flexural vibrations of test specimens. 1. Experimental basis // Mechanics of Composite Materials. – 2014. – V. 50, № 2. – P. 127–136.
7. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Контактная постановка задач механики подкреплённых на контуре трехслойных оболочек с трансверсально-мягким заполнителем // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2017. – № 1. – С. 77–85.
8. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Мартынова О.П. Постановка геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // Тенденции науки и образования в современном мире. – 2016. – № 16-1. – С. 5–11.
9. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Мартынова О.П. Операторная формулировка геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // Тенденции науки и образования в современном мире. – 2016. – № 18-3. – С. 5–13.
10. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Смирнова Е.В. Обобщенная постановка геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины // Тенденции науки и образования в современном мире. – 2017. – № 23-1. – С. 4–10.
11. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Смирнова Е.В. О псевдомонотонности оператора геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины // Тенденции науки и образования в современном мире. – 2017. – № 24-2. – С. 5–14.
12. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Смирнова Е.В. О свойстве типа ограниченной липшиц-непрерывности оператора геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины // Тенденции науки и образования в современном мире. – 2017. – № 25-3. – С. 5–12.
13. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Смирнова Е.В. О квазипотенциальности оператора геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины // Тенденции науки и образования в современном мире. – 2017. – № 26-1. – С. 5–12.
14. Вайнберг М.М. Вариационный метод и метод монотонных операторов. – М: Наука, 1972. – 416 с.
15. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Макаров М.В. Численное исследование физически нелинейных задач об изгибе трехслойных пластин // В сборнике: Материалы XI Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ'2016) Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 2016. – С. 475–477.
16. Бадриев И.Б., Гарипова Г.З., Макаров М.В., Паймушин В.Н., Хабибуллин Р.Ф. О решении физически нелинейных задач о равновесии трехслойных пластин с трансверсально-мягким заполнителем // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2015. – Т. 157, № 1. – С. 15–24.
17. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Гарипова Г.З., Макаров М.В. О разрешимости нелинейной задачи о равновесии трехслойной пластины // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2015. – Т. 20, № 5. – С. 1034–1037.
18. Бадриев И.Б., Гарипова Г.З., Макаров М.В. Сеточные аппроксимации физически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // В сборнике: Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна - 2016. Материалы международной конференции. – Воронеж: Издательско-полиграфический центр «Научная книга», 2016. – С. 70–72.
19. Badriev I.B., Garipova G.Z., Makarov M.V., Paimushin V.N., Khabibullin R.F. Solving physically nonlinear equilibrium problems for sandwich plates with a transversally soft core // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2015. – V. 36, № 4. – P. 474–481.
20. Badriev I.B., Banderov V.V. Numerical solution of the equilibrium of axisymmetric soft shells // Математические методы в технике и технологиях-ММТТ. - 2014. - № 5 (64). - С. 16-20.

21. Badriev I.B., Banderov V.V., Gnedenkova V.L., Kalacheva N.V., Korablev A.I., Tagirov R.R. On the finite dimensional approximations of some mixed variational inequalities // *Applied Mathematical Sciences*. – 2015. – V. 9, № 113-116. – P. 5697–5705.
22. Бадриев И.Б. Решение вариационных задач нелинейных процессов механики сплошной среды // В книге: Теория управления и математическое моделирование Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова. Удмуртский государственный университет. – Ижевск: Изд-во "Удмуртский университет", 2015. – С. 234–235.
23. Бадриев И.Б. О решении вариационных неравенств второго рода // В сборнике: Сеточные методы для краевых задач и приложения Материалы Девятой Всероссийской конференции. – Казань: Отечество, 2012. – С. 32–35.
24. Бадриев И.Б., Бандеров В.В. Численное моделирование деформирования биокomпозитов // В книге: Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред Материалы XXI международного симпозиума имени А.Г. Горшкова. Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет). – Москва: ООО "ТРИП", 2015. – С. 7–9.
25. Бадриев И.Б., Задворнов О.А. Исследование разрешимости осесимметричной задачи об определении положения равновесия мягкой оболочки вращения // *Известия высших учебных заведений. Математика*. – 2005. – № 1. – С. 25–30.
26. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Калачева Н.В. Численное исследование вариационных и квазивариационных неравенств теории мягких сетчатых оболочек // *Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки*. – 2015. – Т. 20, № 5. – С. 1037–1041.
27. Бадриев И.Б., Бандеров В.В. Численное решение задач о равновесии осесимметричных мягких оболочек // *Вестник Тамбовского государственного технического университета*. – 2015. – Т. 21, № 1. – С. 29–35.
28. Бадриев И.Б., Бандеров В.В. Итерационные методы решения вариационных неравенств теории мягких оболочек // *Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки*. – 2013. – Т. 155, № 2. – С. 19–33.
29. Badriev I.B., Garipova G.Z., Paymushin V.N., Makarov M.V. Numerical solution of the issue about geometrically nonlinear behavior of sandwich plate with transversal soft filler // *Research Journal of Applied Sciences*. – 2015. – V. 10, № 8. – P. 428–435.
30. Бадриев И.Б., Желтухин В.С., Чебакова В.Ю. О решении некоторых нелинейных краевых и начально-краевых задач // В книге: Материалы XXII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет). – Москва: ООО "ТРИП", 2016. – С. 31–33.
31. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Разрешимость физически и геометрически нелинейной задачи теории трехслойных пластин с трансверсально-мягким заполнителем // *Известия высших учебных заведений. Математика*. – 2015. – № 10. – С. 66–71.
32. Макаров М.В., Бадриев И.Б., Паймушин В.Н. Определение критических точек бифуркации для задачи о геометрически нелинейном поведении трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // В сборнике: Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна - 2016. Материалы международной конференции. – Воронеж: Издательско-полиграфический центр «Научная книга», 2016. – С. 292–294.
33. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Исследование задачи об изгибе трехслойной пластины в физически нелинейной постановке // В сборнике: Математическое моделирование и краевые задачи Труды десятой Всероссийской научной конференции с международным участием: в 3-х томах, 2016. – С. 19–24.
34. Макаров М.В. Численное исследование геометрически нелинейной задачи о поперечном изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // *Тенденции науки и образования в современном мире*. – 2016. – № 17-2. – С. 26–35.
35. Макаров М.В. О решении геометрически нелинейных и линейных задач о поперечном изгибе жестко закрепленной трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // *Тенденции науки и образования в современном мире*. – 2016. – № 19-2. – С. 23–29.
36. Paimushin V.N., Bobrov S.N. Refined geometric nonlinear theory of sandwich shells with a transversely soft core of medium thickness for investigation of mixed buckling forms // *Mechanics of Composite Materials*. – 2000. – V. 36, № 1. – P. 59–66.
37. Паймушин В.Н. Обобщенный вариационный принцип Рейсснера в нелинейной механике пространственных составных тел с приложениями к теории многослойных оболочек // *Известия РАН. Механика твердого тела*. – 1987. – № 2. – С. 171.
38. Adams R.A. *Sobolev Spaces*. – New York, San Francisco, London: Academic Press, 1975. – 286 p.
39. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М: Мир, 1978. – 336 с.
40. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. – М: Издательство иностранной литературы, 1962. – 830 с.

41. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Геометрически нелинейная задача о продольно-поперечном изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // Ученые записки Казанского университета. Серия: физико-математические науки. – 2016. – Т. 158, № 4. – С. 453–468.
42. Бадриев И.Б., Фанюк Б.Я. Итерационные методы решения задач фильтрации в многослойных пластах при наличии точечного источника // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2010. – Т. 152, № 4. – С. 39–55.
43. Бадриев И.Б., Сингатуллин М.Т., Чебаков Ю.В. Численное исследование задач подземной установившейся фильтрации высоковязких жидкостей при наличии скважин // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2015. – Т. 20, № 5. – С. 1041–1043.
44. Badriev I.B., Banderov V.V., Singatullin M.T. Numerical solution of non-linear filtration issues for high viscous fluids at the presence of wells // Research Journal of Applied Sciences. – 2015. – V. 10, № 8. – P. 343–346.
45. Badriev I.B., Fanyuk B.Y. Iterative methods for solving seepage problems in multilayer beds in the presence of a point source // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2012. – V. 33, № 4. – P. 386–399.
46. Бадриев И.Б., Задворнов О.А. Итерационные методы решения вариационных неравенств второго рода с обратно сильно монотонными операторами // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2003. – № 1. – С. 20–28.
47. Бадриев И.Б., Задворнов О.А. О сходимости итерационного метода двойственного типа решения смешанных вариационных неравенств // Дифференциальные уравнения. – 2006. – Т. 42, № 8. – С. 1115–1122.
48. Абдуллин И.Ш., Желтухин В.С., Чебакова В.Ю., Шнейдер М.Н. Тематическая модель ВЧЕ-разряда в аргоне при больших межэлектродных расстояниях // Вестник Казанского технологического университета. – 2013. – Т. 16, № 22. – С. 334–338.
49. Желтухин В.С., Соловьёв С.И., Соловьёв П.С., Чебакова В.Ю. Вычисление минимального собственного значения нелинейной задачи Штурма – Лиувилля // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2013. – Т. 155, № 3. – С. 91–104.
50. Бадриев И.Б., Ляшко А.Д., Панкратова О.В. Исследование сходимости итерационных методов решения нелинейных задач теории фильтрации // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1998. – № 11. – С. 8–13.
51. Бадриев И.Б. Математическое моделирование стационарных задач подземной фильтрации с многозначным законом // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2013. – Т. 18, № 5-2. – С. 2444–2446.
52. Чебакова В.Ю. Моделирование высокочастотного емкостного разряда при атмосферном давлении в аргоне // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2016. – Т. 158, № 3. – С. 404–423.
53. Бадриев И.Б., Исмагилов И.Н. Итерационные методы решения нелинейных стационарных задач анизотропной фильтрации // Журнал Средневолжского математического общества. – 2006. – Т. 8, № 1. – С. 150–159.
54. Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N. Numerical investigation of physically nonlinear problem of sandwich plate bending // Procedia Engineering. 2016. - V. 150. - P. 1050–1055.
55. Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N. Mathematical simulation of nonlinear problem of three-point composite sample bending test // Procedia Engineering. 2016. - V. 150. - P. 1056–1062.
56. Бадриев И.Б., Чебакова В.Ю. Математическое моделирование низкотемпературной ВЧЕ-плазмы в аргоне // В сборнике: Математическое моделирование и краевые задачи Труды десятой Всероссийской научной конференции с международным участием: в 3-х томах, 2016. – С. 17–21.
57. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Разрешимость физически и геометрически нелинейной задачи теории трехслойных пластин с трансверсально-мягким заполнителем // Известия высших учебных заведений. Математика. - 2015. - № 10. - С. 66–71.
58. Бадриев И.Б. Математическое моделирование процессов механики сплошной среды при наличии точечных источников и нагрузок // В книге: Материалы XXII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет). - Москва: ООО "ТР-принт", 2016. - С. 28–31.
59. Badriev I.B., Chebakova V.Y., Zheltukhin V.S. Capacitive coupled RF discharge: modelling at the local statement of the problem // Journal of Physics: Conference Series. – 2017. – V. 789, № 1. – 012004.
60. Zheltukhin V.S., Solovyev P.S., Chebakova V.Y. Boundary conditions for electron balance equation in the stationary high-frequency induction discharges // Research Journal of Applied Sciences. – 2015. – V. 10, № 10. – P. 658–662.
61. Бадриев И.Б., Задворнов О.А., Исмагилов Л.Н., Скворцов Э.В. Решение плоских задач фильтрации при многозначном законе фильтрации и наличии точечного источника // Прикладная математика и механика. – 2009. – Т. 73, № 4. – С. 604–614.
62. Badriev I.B., Banderov V.V., Zadvornov O.A. On the equilibrium problem of a soft network shell in the presence of several point loads // Applied Mechanics and Materials. – 2013. – V. 392. – P. 188–190.