Бадриев И.Б., Макаров М.В., Смирнова Е.В.
*Казанский (Приволжский) федеральный университет
Казань, Россия*

doi: 10.18411/lj-30-04-2017-3-01
idsp 000001:lj-30-04-2017-3-01

О свойстве типа ограниченной липшиц-непрерывности оператора геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины

Введение.

Внедрение слоистых элементов конструкций в различных отраслях техники повлекло за собой интенсивные исследования в области теории и разработки методов их расчета. В результате за последние пятьдесят лет в механике деформируемого твердого тела сложилось отдельное направление, связанное с исследованием проблем механики многослойных (в частности, трехслойных) стержней, пластин и оболочек [1–6]. Большинство применяемых в настоящее время моделей процессов деформирования оболочек основано на линейных постановках, в частности, это в большой степени относится к задачам исследования форм потери устойчивости оболочек и пластин. Настоящая работа посвящена изучению геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем.. Она является продолжением [7–10] и посвящена доказательству свойства типа ограниченной липшиц-непрерывности [11–13] введенного в [9] оператора геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем, сформулированной в виде уравнения в пространстве Соболева. Это свойство необходимо при исследовании сходимости итерационного метода решения изучаемой задачи (см. [11–13]). Обобщенные постановки для физически нелинейных и геометрически линейных задач в виде седловых задач, а также методы их решения рассмотрены в [14–18]. Физически нелинейные задачи теории мягких сетчатых оболочек изучены в [17–27]. Численное решение геометрически нелинейных задач проводилось в [28–34].

1. Операторная постановка задачи.

Рассматриваются задачи об определении напряженно-деформированного состояния бесконечно широкой трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем. Длина пластины равна a , толщина заполнителя составляет $2t$, толщины несущих слоев равны $2t_{(k)}$, где k – номер слоя. Для описания напряженно-деформированного состояния (НДС) в несущих слоях используются уравнения модели Кирхгофа-Лява, в заполнителе – уравнения теории упругости, упрощенные в рамках принятой модели трансверсально-мягкого слоя и проинтегрированных по толщине с удовлетворением условий сопряжения слоев по перемещениям [35, 36]. В соответствии с [35, 36] введем следующие обозначения: $H_{(k)} = t + t_{(k)}$ (всюду в дальнейшем полагаем, что $k=1,2$), $X_{(k)}^1$, $X_{(k)}^3$ – компоненты поверхностной нагрузки, приведенной к срединной поверхности k -го слоя, $w^{(k)}$ и $u^{(k)}$ – прогибы и осевые перемещения точек срединной поверхности k -го слоя, $T_{(k)}^{11}$, $M_{(k)}^{11}$ – мембранные усилия и внутренние изгибающие моменты в k -м слое, определяемые по формулам $M_{(k)}^{11} = D_{(k)} d^2 u^{(k)} / dx^2$, $T_{(k)}^{11} = B_{(k)} (d u^{(k)} / dx + 0.5 (d w^{(k)} / dx)^2)$, где $B_{(k)} = 2t_{(k)} E^{(k)} / (1 - \nu_{12}^{(k)} \nu_{21}^{(k)})$ – жесткость k -го слоя на растяжение–сжатие, $E^{(k)}$ и $\nu_{12}^{(k)}$, $\nu_{21}^{(k)}$ – модуль упругости первого рода и коэффициенты Пуассона материала k -го несущего слоя, $D_{(k)} = B_{(k)} t_{(k)}^2 / 3$ – изгибная жесткость k -го слоя.. Края пластины предполагаем закрепленными, т.е. $u^{(k)}(x) = 0$, $w^{(k)}(x) = 0$, $d w^{(k)}(x) / dx = 0$ при $x = 0$, $x = a$. Пусть $U = (w^{(1)}, w^{(2)}, u^{(1)}, u^{(2)})$ – вектор перемещений точек срединной поверхности k -го слоя, q^1 – касательные напряжения в заполнителе. Для q^1 считаем, что выполнены граничные условия $q^1(0) = q^1(a) = 0$. Пусть G_{13} , E_3 – модули поперечного сдвига и обжатия заполнителя, $c_1 = 2t / G_{13}$, $c_2 = t^3 / (3E_3)$, $c_3 = E_3 / (2t)$, $M_{(k)}^1$ – поверхностный момент внешних сил, приведенный к срединной поверхности k -го слоя, Полагаем, что все постоянные a , G_{13} , E_3 , t , $E^{(k)}$, $\nu_{12}^{(k)}$, $\nu_{21}^{(k)}$, $t_{(k)}$, $k = 1, 2$, положительны.

Пусть $V_k = W_2^{(k)}(0, a)$ – пространства Соболева [37] со скалярными

произведениями $(u, \eta)_k = \int_0^a d^k u / dx^k d^k \eta / dx^k dx$, $k=0, 1, 2$, $V = V_2 \times V_2 \times V_1 \times V_1$.

Будем обозначать скалярное произведение в V через $(\cdot, \cdot)_V$. В [8, 9] установлено, что решением рассматриваемой задачи есть элемент (U, q^1) , являющийся решением вариационного уравнения

$$b((U, q^1), (Z, y)) = f(Z) \quad \forall (Z, y) \in W = V \times V_1, \quad (1)$$

где форма $b(\cdot, \cdot)$, заданная на $W \times W$, и функционал f , заданный на V , определяются по формулам

$$\begin{aligned} b((U, q^1), (Z, y)) = & \int_0^a \sum_{k=1}^2 B_{(k)} \left[\frac{du^{(k)}}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw^{(k)}}{dx} \right)^2 \right] \frac{d\eta^{(k)}}{dx} dx + \\ & + \int_0^a \sum_{k=1}^2 B_{(k)} \left[\frac{du^{(k)}}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw^{(k)}}{dx} \right)^2 \right] \frac{dw^{(k)}}{dx} \frac{dz^{(k)}}{dx} dx + \int_0^a \sum_{k=1}^2 D_{(k)} \frac{d^2 w^{(k)}}{dx^2} \frac{d^2 z^{(k)}}{dx^2} dx + \\ & + c_3 \int_0^a (w^{(2)} - w^{(1)})(z^{(2)} - z^{(1)}) dx + \int_0^a \left\{ \sum_{k=1}^2 H_{(k)} \frac{dz^{(k)}}{dx} + (\eta^{(2)} - \eta^{(1)}) \right\} q^1 dx + \\ & + \int_0^a \left\{ \left[\sum_{k=1}^2 H_{(k)} \frac{dw^{(k)}}{dx} + (u^{(2)} - u^{(1)}) + c_1 q^1 \right] y + c_2 dq^1 / dx dy / dx \right\} dx = 0 \\ & \forall Z = (z^{(1)}, z^{(2)}, \eta^{(1)}, \eta^{(2)}) \in V, \quad \forall y \in V_1, \end{aligned} \quad (2)$$

$$f(Z) = \int_0^a \sum_{k=1}^2 [X_{(k)}^1 \eta^{(k)} + M_{(k)}^1 \frac{dz^{(k)}}{dx} + X_{(k)}^3 z^{(k)}] dx \quad \forall Z \in V. \quad (3)$$

В [9] установлено, что форма $b(\cdot, \cdot)$, задаваемая (2), порождает оператор $A: W \rightarrow W$, определяемый формулой

$$b((U, q^1), (Z, y)) = (A(U, q^1), (Z, y))_W \quad \forall (Z, y) \in W, \quad (4)$$

где $(\cdot, \cdot)_W$ – скалярное произведение в W , а функционал f , задаваемый (3), порождает элемент $F \in V$, определяемый формулой $(F, Z)_V = f(Z)$ для всех $Z \in V$.

Поэтому задача (1) может быть записана в виде операторного уравнения

$$A(U, q^1) = (F, 0) \quad (5)$$

3. Свойство типа ограниченной липшиц-непрерывности оператора A .

Будем говорить, что оператор $A: Y \rightarrow Y$ удовлетворяет свойству типа ограниченной липшиц-непрерывности (см. [12, 13], сравни с [11]), если

$$\|AU - AZ\|_Y \leq \mu(R)\Phi(\|U - Z\|_Y) \quad \forall U, Z \in Y, \quad (6)$$

где $R = \max\{\|U\|_Y, \|Z\|_Y\}$, μ – неубывающая на $[0, +\infty)$ функция, $\Phi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ – непрерывная, возрастающая функция, удовлетворяющая условиям $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \Phi(\xi) = +\infty$, $\Phi(0) = 0$.

В дальнейшем нам потребуется следующая теорема вложения Соболева [37, стр. 68].

Теорема 1. Пусть $\Omega \subset R^n$ – ограниченная область с регулярной границей Γ и $1 \leq p < \infty$. Тогда $W_p^{(k)}(\Omega) \subset W_r^{(j)}(\Omega)$ для $0 \leq j < k$ и каждого r , удовлетворяющего условию $1/p - (k - j)/n \leq 1/r < 1$; кроме того, для любой функции $u \in W_p^{(k)}(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\|u\|_{j,r} \leq C_{jr}^{kp} \|u\|_{k,p}, \quad (7)$$

где $\|\cdot\|_{k,p}$ – норма в $W_p^{(k)}(\Omega)$, а постоянная C_{jr}^{kp} зависит от Ω, j, k, p, r .

Далее, для любых функций u, v, w силу обобщенного неравенства Гельдера с показателями 2, 4, 4 [40] имеет место оценка

$$\left| \int_0^a u(x)v(x)w(x)dx \right| \leq \left(\int_0^a |u(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^a |v(x)|^4 dx \right)^{1/4} \left(\int_0^a |w(x)|^4 dx \right)^{1/4} \quad (8)$$

Справедлива

Теорема 2. Оператор $A: W \rightarrow W$, определяемый формулами (2), (4), удовлетворяет свойству типа ограниченной липшиц-непрерывности с функциями $\Phi(\xi) = \xi$, $\mu(\xi) = c^*(1 + \xi + \xi^2)$, где положительная константа c^* зависит от $a, G_{13}, E_3, t, E^{(k)}, v_{12}^{(k)}, v_{21}^{(k)}, t_{(k)}$, $k = 1, 2$, и постоянных в неравенствах вложения (7).

Доказательство. Для любых $(U, q^1) = (w^{(1)}, w^{(2)}, u^{(1)}, u^{(2)}, q^1)$, $(\hat{U}, \hat{q}^1) = (\hat{w}^{(1)}, \hat{w}^{(2)}, \hat{u}^{(1)}, \hat{u}^{(2)}, \hat{q}^1)$ $(Z, y) = (z^{(1)}, z^{(2)}, \eta^{(1)}, \eta^{(2)}, y)$ из W имеем

$$\begin{aligned}
& (A(U, q^1) - A(\hat{U}, \hat{q}^1), (Z, y))_W = \int_0^a \sum_{k=1}^2 B_{(k)} \left[\frac{d(u^{(k)} - \hat{u}^{(k)})}{dx} \right]^2 \frac{d\eta^{(k)}}{dx} dx + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^a \sum_{k=1}^2 B_{(k)} \left[\left(\frac{dw^{(k)}}{dx} \right)^2 - \left(\frac{d\hat{w}^{(k)}}{dx} \right)^2 \right] \frac{d\eta^{(k)}}{dx} dx + \\
& + \int_0^a \sum_{k=1}^2 B_{(k)} \left[\frac{du^{(k)}}{dx} \frac{dw^{(k)}}{dx} - \frac{d\hat{u}^{(k)}}{dx} \frac{d\hat{w}^{(k)}}{dx} \right] \frac{dz^{(k)}}{dx} dx + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^a \sum_{k=1}^2 B_{(k)} \left[\left(\frac{dw^{(k)}}{dx} \right)^3 - \left(\frac{d\hat{w}^{(k)}}{dx} \right)^3 \right] \frac{dz^{(k)}}{dx} dx + \\
& + \int_0^a \sum_{k=1}^2 D_{(k)} \left[\frac{d^2(w^{(k)} - \hat{w}^{(k)})}{dx^2} \right] \frac{dz^{(k)}}{dx^2} dx + c_3 \int_0^a (w^{(2)} - w^{(1)} - \hat{w}^{(2)} + \hat{w}^{(1)})(z^{(2)} - z^{(1)}) dx + \\
& + \int_0^a \left[\sum_{k=1}^2 H_{(k)} \frac{dz^{(k)}}{dx} + (\eta^{(2)} - \eta^{(1)}) \right] (q^1 - \hat{q}^1) dx + c_2 \int_0^a \frac{d(q^1 - \hat{q}^1)}{dx} \frac{dy}{dx} dx + \\
& + \int_0^a \left[\sum_{k=1}^2 H_{(k)} \frac{d(w^{(k)} - \hat{w}^{(k)})}{dx} + (u^{(2)} - u^{(1)}) - (\hat{u}^{(2)} - \hat{u}^{(1)}) + c_1(q^1 - \hat{q}^1) \right] y dx = \sum_{j=1}^9 I_j.
\end{aligned}$$

В силу неравенства Коши-Буняковского $|I_1| \leq \sum_{k=1}^2 B_{(k)} \|u^{(k)} - \hat{u}^{(k)}\|_1 \|\eta^{(k)}\|_1$,

$|I_5| \leq \sum_{k=1}^2 D_{(k)} \|w^{(k)} - \hat{w}^{(k)}\|_2 \|z^{(k)}\|_2$, $|I_8| \leq c_2 \|q^1 - \hat{q}^1\|_1 \|y\|_1$. Из неравенств

(7), (8) следует, что

$$\begin{aligned}
|I_2| & \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 B_{(k)} \|w^{(k)} - \hat{w}^{(k)}\|_{1,4} \|w^{(k)} + \hat{w}^{(k)}\|_{1,4} \|\eta^{(k)}\|_1 \leq \\
& \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 B_{(k)} (C_{14}^{22})^2 \|w^{(k)} - \hat{w}^{(k)}\|_2 (\|w^{(k)}\|_2 + \|\hat{w}^{(k)}\|_2) \|\eta^{(k)}\|_1
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
|I_3| &\leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 B_{(k)} \int_0^a \left| \frac{du^{(k)}}{dx} \frac{d(w^{(k)} - \hat{w}^{(k)})}{dx} + \frac{d(u^{(k)} - \hat{u}^{(k)})}{dx} \frac{d\hat{w}^{(k)}}{dx} \right| \left| \frac{dz^{(k)}}{dx} \right| dx \leq \\
&\leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 B_{(k)} \left[\|u^{(k)}\|_1 \|w^{(k)} - \hat{w}^{(k)}\|_{1,4} + \|u^{(k)} - \hat{u}^{(k)}\|_1 \|\hat{w}^{(k)}\|_{1,4} \right] \|z^{(k)}\|_{1,4} \leq \\
&\leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 B_{(k)} (C_{14}^{22})^2 \left[\|u^{(k)}\|_1 (\|w^{(k)} - \hat{w}^{(k)}\|_2) + (\|u^{(k)} - \hat{u}^{(k)}\|_1) \|\hat{w}^{(k)}\|_2 \right] \|z^{(k)}\|_2.
\end{aligned}$$

Снова используя неравенства (7), (8), получаем

$$\begin{aligned}
|I_4| &\leq \frac{1}{2} \int_0^a \sum_{k=1}^2 B_{(k)} \left| \frac{d(w^{(k)} - \hat{w}^{(k)})}{dx} \left[\left(\frac{dw^{(k)}}{dx} \right)^2 + \left| \frac{dw^{(k)}}{dx} \frac{d\hat{w}^{(k)}}{dx} \right| + \left(\frac{d\hat{w}^{(k)}}{dx} \right)^2 \right] \right| \left| \frac{dz^{(k)}}{dx} \right| dx \leq \\
&\leq \frac{3}{4} \int_0^a \sum_{k=1}^2 B_{(k)} \left| \frac{d(w^{(k)} - \hat{w}^{(k)})}{dx} \right| \left[\left(\frac{dw^{(k)}}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\hat{w}^{(k)}}{dx} \right)^2 \right] \left| \frac{dz^{(k)}}{dx} \right| dx \leq \\
&\leq \frac{3}{4} \sum_{k=1}^2 B_{(k)} \|w^{(k)} - \hat{w}^{(k)}\|_{1,4} \left[\|w^{(k)}\|_{1,8}^2 + \|\hat{w}^{(k)}\|_{1,8}^2 \right] \|z^{(k)}\|_{1,2} \leq \\
&\leq \frac{3}{4} \sum_{k=1}^2 B_{(k)} C_{14}^{22} C_{18}^{22} C_{12}^{22} \|w^{(k)} - \hat{w}^{(k)}\|_2 (\|w^{(k)}\|_2^2 + \|\hat{w}^{(k)}\|_2^2) \|z^{(k)}\|_2.
\end{aligned}$$

Далее,

$$|I_6| \leq c_3 \int_0^a (|w^{(2)} - \hat{w}^{(2)}| + |w^{(1)} - \hat{w}^{(1)}|) |z^{(2)} - z^{(1)}| dx \leq c_3 \sum_{k=1}^2 \|w^{(k)} - \hat{w}^{(k)}\|_{1,2} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^2 \|z^{(k)}\|_{1,2} \leq c_3 (C_{14}^{22})^2 \sum_{k=1}^2 \|w^{(k)} - \hat{w}^{(k)}\|_2 \sum_{k=1}^2 \|z^{(k)}\|_2. \text{ Наконец, в силу (7)}$$

$$\begin{aligned}
|I_7| &\leq \sum_{k=1}^2 (H_{(k)} \|z^{(k)}\|_{1,2} + \|\eta^{(k)}\|_{0,2}) \|q^1 - \hat{q}^1\|_{0,2} \leq \\
&\leq C_{02}^{12} \sum_{k=1}^2 (H_{(k)} C_{12}^{22} \|z^{(k)}\|_2 + C_{02}^{12} \|\eta^{(k)}\|_1) \|q^1 - \hat{q}^1\|_1
\end{aligned}$$

и

$$|I_8| \leq \left[\sum_{k=1}^2 (H_{(k)} \|w^{(k)} - \hat{w}^{(k)}\|_{1,2} + \|u^{(k)} - \hat{u}^{(k)}\|_{0,2}) + c_1 \|q^1 - \hat{q}^1\|_{0,2} \right] \|y\|_{0,2} \leq$$

$$\leq C_{02}^{12} \left[\sum_{k=1}^2 (H_{(k)} C_{12}^{22} \|w^{(k)} - \hat{w}^{(k)}\|_2 + C_{02}^{12} \|u^{(k)} - \hat{u}^{(k)}\|_1) + c_1 C_{02}^{12} \|q^1 - \hat{q}^1\|_1 \right] \|y\|_1.$$

Из полученных оценок с учетом того, что $\|w^{(k)}\|_2 \leq \|(U, q^1)\|_W$,
 $\|u^{(k)}\|_1 \leq \|(U, q^1)\|_W$, $\|\hat{w}^{(k)}\|_2 \leq \|(\hat{U}, \hat{q}^1)\|_W$, $\|\hat{u}^{(k)}\|_1 \leq \|(\hat{U}, \hat{q}^1)\|_W$,
 $\|z^{(k)}\|_2 \leq \|(Z, y)\|_W$, $\|\eta^{(k)}\|_1 \leq \|(Z, y)\|_W$, $k=1,2$, $\|q^1\|_1 \leq \|(U, q^1)\|_W$,
 $\|\hat{q}^1\|_1 \leq \|(\hat{U}, \hat{q}^1)\|_W$, $\|y\|_1 \leq \|(Z, y)\|_W$, и следует требуемое неравенство (6).

4. Заключение.

Доказано, что оператор, возникающий при математическом описании геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем удовлетворяет свойству типа ограниченной липшиц-непрерывности. Данное свойство может быть полезным при исследовании сходимости приближенных методов решения задачи (5) по аналогии с [38-44]. При этом будут использованы разработанные в [45–57] подходы.

Публикация осуществлена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №№ 17-08-01279, 16-38-00788, 17-08-01279).

Литература

1. Штамм К., Витте Х. Многослойные конструкции. – М.: Стройиздат, 1983. – 300 с.
2. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Численное исследование физически нелинейной задачи о продольном изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2017. – № 1. – С. 39–51.
3. Макаров М.В., Бадриев И.Б., Паймушин В.Н. Нелинейные задачи о смешанных формах потери устойчивости трехслойных пластин при продольно-поперечном изгибе // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2015. – Т. 20, № 5. – С. 1275–1278.

4. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Решение нелинейных задач теории многослойных оболочек с трансверсально-мягким заполнителем // В сборнике: Сеточные методы для краевых задач и приложения Материалы Десятой Международной конференции, 2014. – С. 103–107.
5. Paimushin V.N. Problems of geometric non-linearity and stability in the mechanics of thin shells and rectilinear columns // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2007. – V. 71, № 5. – P. 772–805.
6. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Контактная постановка задач механики подкрепленных на контуре трехслойных оболочек с трансверсально-мягким заполнителем // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2017. – № 1. – С. 77–85.
7. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Мартынова О.П. Постановка геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // Тенденции науки и образования в современном мире. – 2016. – № 16-1. – С. 5–11.
8. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Мартынова О.П. Операторная формулировка геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // Тенденции науки и образования в современном мире. – 2016. – № 18-3. – С. 5–13.
9. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Смирнова Е.В. Обобщенная постановка геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины // Тенденции науки и образования в современном мире. – 2017. – № 23-1. – С. 4–10.
10. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Смирнова Е.В. О псевдомонотонности оператора геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины // Тенденции науки и образования в современном мире. – 2017. – № 24-2. – С. 5–14.
11. Гаевский Х., Греггер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М: Мир, 1978. – 336 с.
12. Badriev I.B., Zadvornov O.A., Saddek A.M. Convergence analysis of iterative methods for some variational inequalities with pseudomonotone operators // Differential Equations. – 2001. – V. 37, № 7. – P. 934–942.
13. Badriev I.B., Zadvornov O.A., Lyashko A.D. A study of variable step iterative methods for variational inequalities of the second kind // Differential Equations. – 2004. – V. 40, № 7. – P. 971–983.
14. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Макаров М.В. Численное исследование физически нелинейных задач об изгибе трехслойных пластин // В сборнике: Материалы XI Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ'2016) Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 2016. – С. 475–477.
15. Бадриев И.Б., Гарипова Г.З., Макаров М.В., Паймушин В.Н., Хабибуллин Р.Ф. О решении физически нелинейных задач о равновесии трехслойных пластин с трансверсально-мягким заполнителем // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2015. – Т. 157, № 1. – С. 15–24.
16. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Гарипова Г.З., Макаров М.В. О разрешимости нелинейной задачи о равновесии трехслойной пластины // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2015. – Т. 20, № 5. – С. 1034–1037.
17. Бадриев И.Б., Гарипова Г.З., Макаров М.В. Сеточные аппроксимации физически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // В сборнике: Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна - 2016. Материалы международной конференции. – Воронеж: Издательско-полиграфический центр «Научная книга», 2016. – С. 70–72.

18. Badriev I.B., Garipova G.Z., Makarov M.V., Paimushin V.N., Khabibullin R.F. Solving physically nonlinear equilibrium problems for sandwich plates with a transversally soft core // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. – 2015. – V. 36, № 4. – P. 474–481.
19. Badriev I.B., Banderov V.V. Numerical solution of the equilibrium of axisymmetric soft shells // *Математические методы в технике и технологиях - ММТТ*. – 2014. – № 5 (64). – С. 16–20.
20. Badriev I.B., Banderov V.V., Gnedenkova V.L., Kalacheva N.V., Korablev A.I., Tagirov R.R. On the finite dimensional approximations of some mixed variational inequalities // *Applied Mathematical Sciences*. – 2015. – V. 9, № 113–116. – P. 5697–5705.
21. Бадриев И.Б. Решение вариационных задач нелинейных процессов механики сплошной среды // В книге: Теория управления и математическое моделирование Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова. Удмуртский государственный университет. – Ижевск: Изд-во "Удмуртский университет", 2015. – С. 234–235.
22. Бадриев И.Б. О решении вариационных неравенств второго рода // В сборнике: Сеточные методы для краевых задач и приложения Материалы Девятой Всероссийской конференции. – Казань: Отечество, 2012. – С. 32–35.
23. Бадриев И.Б., Бандеров В.В. Численное моделирование деформирования биоконпозитов // В книге: Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред Материалы XXI международного симпозиума имени А.Г. Горшкова. Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет). – Москва: ООО "ТРИП", 2015. – С. 7–9.
24. Бадриев И.Б., Задворнов О.А. Исследование разрешимости осесимметричной задачи об определении положения равновесия мягкой оболочки вращения // *Известия высших учебных заведений. Математика*. – 2005. – № 1. – С. 25–30.
25. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Калачева Н.В. Численное исследование вариационных и квазивариационных неравенств теории мягких сетчатых оболочек // *Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки*. – 2015. – Т. 20, № 5. – С. 1037–1041.
26. Бадриев И.Б., Бандеров В.В. Численное решение задач о равновесии осесимметричных мягких оболочек // *Вестник Тамбовского государственного технического университета*. – 2015. – Т. 21, № 1. – С. 29–35.
27. Бадриев И.Б., Бандеров В.В. Итерационные методы решения вариационных неравенств теории мягких оболочек // *Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки*. – 2013. – Т. 155, кн.2. – С. 18–32.
28. Badriev I.B., Garipova G.Z., Paymushin V.N., Makarov M.V. Numerical solution of the issue about geometrically nonlinear behavior of sandwich plate with transversal soft filler // *Research Journal of Applied Sciences*. – 2015. – V. 10, № 8. – P. 428–435.
29. Бадриев И.Б., Желтухин В.С., Чебакова В.Ю. О решении некоторых нелинейных краевых и начально-краевых задач // В книге: Материалы XXII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет). – Москва: ООО "ТРИП", 2016. – С. 31–33.
30. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Разрешимость физически и геометрически нелинейной задачи теории трехслойных пластин с трансверсально-мягким наполнителем // *Известия высших учебных заведений. Математика*. – 2015. – № 10. – С. 66–71.

31. Макаров М.В., Бадриев И.Б., Паймушин В.Н. Определение критических точек бифуркации для задачи о геометрически нелинейном поведении трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // В сборнике: Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна - 2016. Материалы международной конференции. – Воронеж: Издательско-полиграфический центр «Научная книга», 2016. – С. 292–294.
32. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Исследование задачи об изгибе трехслойной пластины в физически нелинейной постановке // В сборнике: Математическое моделирование и краевые задачи Труды десятой Всероссийской научной конференции с международным участием: в 3-х томах, 2016. – С. 19–24.
33. Макаров М.В. Численное исследование геометрически нелинейной задачи о поперечном изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // Тенденции науки и образования в современном мире. – 2016. – № 17-2. – С. 26–35.
34. Макаров М.В. О решении геометрически нелинейных и линейных задач о поперечном изгибе жестко закрепленной трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // Тенденции науки и образования в современном мире. – 2016. – № 19-2. – С. 23–29.
35. Paimushin V.N., Bobrov S.N. Refined geometric nonlinear theory of sandwich shells with a transversely soft core of medium thickness for investigation of mixed buckling forms // *Mechanics of Composite Materials*. – 2000. – V. 36, № 1. – P. 59–66.
36. Паймушин В.Н. Обобщенный вариационный принцип Рейсснера в нелинейной механике пространственных составных тел с приложениями к теории многослойных оболочек // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 1987. – № 2. – С. 171.
37. Adams R.A. *Sobolev Spaces*. – New York, San Francisco, London: Academic Press, 1975. – 286 p.
38. Бадриев И.Б. Математическое моделирование процессов механики сплошной среды при наличии точечных источников и нагрузок // В книге: Материалы XXII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет). – Москва: ООО "ТРИП", 2016. – С. 28–31.
39. Badriev I.B. Mathematical modeling of continuum mechanics problems with the point sources // В сборнике: Проблемы химмотологии: от эксперимента к математическим моделям высокого уровня. Сборник избранных докладов VI Международной научно-технической конференции, 2016. – С. 19–21.
40. Бадриев И.Б., Фанюк Б.Я. Итерационные методы решения задач фильтрации в многослойных пластах при наличии точечного источника // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2010. – Т. 152, № 4. – С. 39–55.
41. Бадриев И.Б., Сингатуллин М.Т., Чебаков Ю.В. Численное исследование задач подземной установившейся фильтрации высоковязких жидкостей при наличии скважин // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2015. – Т. 20, № 5. – С. 1041–1044.
42. Badriev I.B., Banderov V.V., Singatullin M.T. Numerical solution of non-linear filtration issues for high viscous fluids at the presence of wells // *Research Journal of Applied Sciences*. – 2015. – V. 10, № 8. – P. 343–346.
43. Badriev I.B., Fanyuk B.Y. Iterative methods for solving seepage problems in multilayer beds in the presence of a point source // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. – 2012. – V. 33, № 4. – P. 386–399.

44. Бадриев И.Б., Задворнов О.А. Итерационные методы решения вариационных неравенств второго рода с обратно сильно монотонными операторами // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2003. – № 1. – С. 20-28.
45. Желтухин В.С., Чебакова В.Ю., Шнейдер М.Н. Моделирование ВЧЕ-разряда при больших межэлектродных расстояниях // В сборнике: Сеточные методы для краевых задач и приложения. Материалы Девятой Всероссийской конференции. – Казань: Отечество, 2012. – С. 183–186.
46. Бадриев И.Б., Задворнов О.А. О сходимости итерационного метода двойственного типа решения смешанных вариационных неравенств // Дифференциальные уравнения. – 2006. – Т. 42, № 8. – С. 1115–1122.
47. Абдуллин И.Ш., Желтухин В.С., Чебакова В.Ю., Шнейдер М.Н. Тематическая модель ВЧЕ-разряда в аргоне при больших межэлектродных расстояниях // Вестник Казанского технологического университета. – 2013. – Т. 16, № 22. – С. 334–338.
48. Бикчантаев Д.Х., Желтухин В.С., Чебакова В.Ю. Численное исследование процесса взаимодействия высокочастотного емкостного разряда с материалами // В книге: Теория управления и математическое моделирование. Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова. Удмуртский государственный университет. – Ижевск: Изд-во "Удмуртский университет", 2015. – С. 241–242.
49. Желтухин В.С., Соловьёв С.И., Соловьёв П.С., Чебакова В.Ю. Вычисление минимального собственного значения нелинейной задачи Штурма – Лиувилля // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2013. – Т. 155, № 3. – С. 91–104.
50. Бадриев И.Б., Ляшко А.Д., Панкратова О.В. Исследование сходимости итерационных методов решения нелинейных задач теории фильтрации // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1998. – № 11. – С. 8–13.
51. Бадриев И.Б. Математическое моделирование стационарных задач подземной фильтрации с многозначным законом // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2013. – Т. 18, № 5-2. – С. 2444–2446.
52. Чебакова В.Ю. Моделирование высокочастотного емкостного разряда при атмосферном давлении в аргоне // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2016. – Т. 158, № 3. – С. 404–423.
53. Бадриев И.Б., Нечаева Л.А. Математическое моделирование установившейся фильтрации с многозначным законом // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2013. – № 3. – С. 35–62.
54. Бадриев И.Б., Исмагилов И.Н. Итерационные методы решения нелинейных стационарных задач анизотропной фильтрации // Журнал Средневолжского математического общества. – 2006. – Т. 8, № 1. – С. 150–159.
55. Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N. Numerical investigation of physically nonlinear problem of sandwich plate bending // В сборнике: Procedia Engineering 2. Сер. "2nd International Conference on Industrial Engineering, ICIE 2016", 2016. – P. 1050–1055.
56. Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N. Mathematical simulation of nonlinear problem of three-point composite sample bending test // В сборнике: Procedia Engineering 2. Сер. "2nd International Conference on Industrial Engineering, ICIE 2016", 2016. – P. 1056–1062.
57. Бадриев И.Б., Чебакова В.Ю. Математическое моделирование низкотемпературной ВЧЕ-плазмы в аргоне // В сборнике: Математическое моделирование и краевые задачи Труды десятой Всероссийской научной конференции с международным участием: в 3-х томах, 2016. – С. 17–21.