Бадриев И.Б., Макаров М.В., Смирнова Е.В.
Казанский (Приволжский) федеральный университет
Казань, Россия

doi: 10.18411/ij-28-02-2017-1-01
idsp 000001:ij-28-02-2017-1-01

Обобщенная постановка геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины

Введение.

Трехслойные конструкции широко применяют в аэрокосмической технике, судостроении, транспортном машиностроении, а также в строительстве, когда требуются повышенная жесткость и минимальная масса. Высокая удельная изгибная жесткость в трехслойных конструкциях достигается простым приемом разнесения на некоторое расстояние (за счет промежуточного легкого слоя заполнителя) двух жестких несущих слоев. В качестве заполнителя часто используют различные пенопласты, соты из металлической фольги или полимерной бумаги, гофры, ячейки и др. Для несущих слоев применяют различные металлические сплавы, а также композиционные материалы с высокими удельными жесткостными характеристиками. Для обеспечения совместного деформирования несущие слои скрепляются со слоем заполнителя, например, с помощью высокопрочных клеев [1–5]. Данная работа является продолжением [6, 7] и посвящена построению обобщенной формулировке геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем в виде операторного уравнения в пространстве Соболева. С этой целью на основании теорем вложения Соболева установлено, что интегральные тождества, построенные в [7], порождают определенный на соболевском пространстве оператор. Обобщенные постановки для физически нелинейных и геометрически линейных задач рассмотрены в [8–12]. Физически нелинейные задачи теории мягких сетчатых оболочек изучены в [13–21]. Численное решение геометрически нелинейных задач проводилось в [22–28].

1. Постановка задачи.

Рассматриваются задачи об определении напряженно-деформированного состояния бесконечно длинной трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем. Ширина пластины равна a , толщина заполнителя составляет $2h$, толщины несущих слоев равны $2h_{(k)}$, где k – номер слоя. Исследование процессов деформирования таких элементов, прежде всего, диктуется необходимостью

определения степени их пригодности для дальнейшего использования. Для описания напряженно-деформированного состояния в несущих слоях используются уравнения модели Кирхгофа-Лява, в заполнителе – уравнения теории упругости, упрощенные в рамках принятой модели трансверсально-мягкого слоя и проинтегрированных по толщине с удовлетворением условий сопряжения слоев по перемещениям [29, 30]. В соответствии с [29, 30] введем следующие обозначения: $H_{(k)} = h + h_{(k)}$ (здесь и всюду в дальнейшем полагаем,

что $k=1, 2$), $X_{(k)}^1, X_{(k)}^3$ – компоненты поверхностной нагрузки, приведенной к срединной поверхности k -го слоя, $w^{(k)}$ и $u^{(k)}$ – прогибы и осевые перемещения точек срединной поверхности k -го слоя соответственно, $T_{(k)}^{11}, M_{(k)}^{11}$ – мембранные усилия и внутренние изгибающие моменты в k -м слое соответственно. Края пластины предполагаем закрепленными, так что выполняются условия $u^{(k)}(x) = 0$, $w^{(k)}(x) = 0$, $d w^{(k)} / dx = 0$ при $x = 0, x = a$. Рассматриваем геометрически

нелинейный случай: $M_{(k)}^{11} = D_{(k)} d^2 u^{(k)} / dx^2$,
 $T_{(k)}^{11} = B_{(k)} (d u^{(k)} / dx + 0.5 (d w^{(k)} / dx)^2)$, где $B_{(k)} = 2h_{(k)} E^{(k)} / (1 - \nu_{12}^{(k)})(1 - \nu_{21}^{(k)})$ –

жесткость k -го слоя на растяжение–сжатие, $E^{(k)}$ и $\nu_{12}^{(k)}, \nu_{21}^{(k)}$ – модуль упругости первого рода и коэффициенты Пуассона материала k -го несущего слоя, $D_{(k)} = B_{(k)} h_{(k)}^2 / 3$ – изгибная жесткость k -го слоя. Пусть

$U = (w^{(1)}, w^{(2)}, u^{(1)}, u^{(2)})$ – вектор перемещений точек срединной поверхности k -го слоя, q^1 – касательные напряжения в заполнителе. Для q^1 предполагаем

выполненными граничные условия $q^1(0) = q^1(a) = 0$. В [29, 30] для описания напряженно-деформированного состояния трехслойной пластины был построен функционал потенциальной энергии деформаций:

$$L(U, q^1) = P(U, q^1) - A(U, q^1) - A_q(U, q^1),$$

$$P(U, q^1) = \frac{1}{2} \int_0^a \left\{ \sum_{k=1}^2 [B_{(k)} (d u^{(k)} / dx + \frac{1}{2} (d w^{(k)} / dx)^2) + D_{(k)} (d^2 w^{(k)} / dx^2)^2 + c_1 (q^1)^2 + c_2 (d q^1 / dx)^2 + c_3 (w^{(2)} - w^{(1)})^2 \right\} dx$$

есть потенциальная энергия деформации, G_{13} , E_3 – модули поперечного сдвига и обжатия заполнителя, $c_1 = 2h / G_{13}$,

$$A(U, q^1) = \int_0^a \sum_{k=1}^2 [X_{(k)}^1 u^{(k)} + M_{(k)}^1 d w^{(k)} / dx + X_{(k)}^3 w^{(k)}] dx$$

$c_2 = h^3 / 3 E_3$, $c_3 = E_3 / (2h)$,

есть работа заданных внешних сил и моментов, $M_{(k)}^1$ – поверхностный момент внешних сил, приведенный к срединной поверхности k -го слоя,

$$A_q(U, q^1) = \int_0^a [(u^{(1)} - u^{(2)}) - \sum_{k=1}^2 H_{(k)} dw^{(k)}/dx + c_1 q^1 - c_2 d^2 q^1/dx^2] q^1 dx - \text{ работа}$$

неизвестных контактных касательных напряжений на соответствующих перемещениях. При этом установлено [30], что решением задачи о равновесии трехслойной пластины являются стационарные точки функционала L .

Предполагаем, что все постоянные $c_1, c_2, c_3, G_{13}, E_3, h, B_{(k)}, D_{(k)}, E^{(k)}, v_{12}^{(k)}, v_{21}^{(k)}, h_{(k)}, k = 1, 2$, положительны.

2. Обобщенная постановка задачи в виде операторного уравнения.

Пусть $V_k = \overset{o}{W}_2^{(k)}(0, a)$ – пространства Соболева [31] со скалярными

$$(u, \eta)_k = \int_0^a d^k u / dx^k d^k \eta / dx^k dx$$

произведениями $, k = 1, 2, V = V_2 \times V_2 \times V_1 \times V_1$.

Будем обозначать скалярное произведение в V через $(\cdot, \cdot)_V$. В [7] были получены уравнения для стационарных точек функционала L путем вычисления производных Гато [32] этого функционала. Было установлено, что стационарные точки (U, q^1) являются решением вариационного уравнения

$$b((U, q^1), (Z, y)) = f(Z) \quad \forall (Z, y) \in W = V \times V_1, \quad (1)$$

где форма $b(\cdot, \cdot)$, заданная на $W \times W$, и функционал f , заданный на V , определяются по формулам

$$\begin{aligned} b((U, q^1), (Z, y)) = & \int_0^a \sum_{k=1}^2 B_{(k)} \left[\frac{du^{(k)}}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw^{(k)}}{dx} \right)^2 \right] \frac{d\eta^{(k)}}{dx} dx + \\ & + \int_0^a \sum_{k=1}^2 B_{(k)} \left[\frac{du^{(k)}}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw^{(k)}}{dx} \right)^2 \right] \frac{dw^{(k)}}{dx} \frac{dz^{(k)}}{dx} dx + \int_0^a \sum_{k=1}^2 D_{(k)} \frac{d^2 w^{(k)}}{dx^2} \frac{d^2 z^{(k)}}{dx^2} dx + \\ & + c_3 \int_0^a (w^{(2)} - w^{(1)})(z^{(2)} - z^{(1)}) dx + \int_0^a \left\{ \sum_{k=1}^2 H_{(k)} \frac{dz^{(k)}}{dx} + (\eta^{(2)} - \eta^{(1)}) \right\} q^1 dx + \quad (2) \end{aligned}$$

$$+ \int_0^a \left\{ \left[\sum_{k=1}^2 H_{(k)} \frac{dw^{(k)}}{dx} + (u^{(2)} - u^{(1)}) + c_1 q^1 \right] y + c_2 dq^1/dx dy/dx \right\} dx = 0$$

$$\forall Z = (z^{(1)}, z^{(2)}, \eta^{(1)}, \eta^{(2)}) \in V, \quad \forall y \in V_1,$$

$$f(Z) = \int_0^a \sum_{k=1}^2 \left[X_{(k)}^1 \eta^{(k)} + M_{(k)}^1 \frac{dz^{(k)}}{dx} + X_{(k)}^3 z^{(k)} \right] dx \quad \forall Z \in V. \quad (3)$$

Легко проверить, что форма $b(\cdot, \cdot)$, линейна по второму аргументу. Кроме того, она ограничена по второму аргументу. Действительно,

$$\left| \int_0^a \frac{du^{(k)}}{dx} \frac{d\eta^{(k)}}{dx} dx \right| \leq \|u^{(k)}\|_{1,2} \|\eta^{(k)}\|_{1,2}, \left| \int_0^a \frac{dq^1}{dx} \frac{dy}{dx} dx \right| \leq \|q^1\|_{1,2} \|y\|_{1,2}. \quad (4)$$

Далее, имеет место следующая теорема [31, стр. 68].

Теорема 1. Пусть $\Omega \subset R^n$ – ограниченная область с регулярной границей Γ и $1 \leq p < \infty$. Тогда $W_p^{(k)}(\Omega) \subset W_r^{(j)}(\Omega)$ для $0 \leq j < k$ и каждого r , удовлетворяющего условию $1/p - (k-j)/n \leq 1/r < 1$; кроме того, для любой функции $u \in W_p^{(k)}(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\|u\|_{j,r} \leq C_{jr}^{kp} \|u\|_{k,p}, \quad (5)$$

где $\|\cdot\|_{k,p}$ – норма в $W_p^{(k)}(\Omega)$, а постоянная C_{jr}^{kp} зависит от Ω, j, k, p, r .

Из (6) вытекает следующее неравенство

$$\|w^{(k)}\|_{1,4} \leq C_{14}^{22} \|w^{(k)}\|_{2,2}, \quad (6)$$

из которого следует, что

$$\left| \int_0^a \left(\frac{dw^{(k)}}{dx} \right)^2 \frac{d\eta^{(k)}}{dx} dx \right| \leq \|\eta^{(k)}\|_{1,2} \|w^{(k)}\|_{1,4}^2 \leq (C_{14}^{22})^2 \|\eta^{(k)}\|_{1,2} \|w^{(k)}\|_{2,2}^2. \quad (7)$$

Применяя обобщенное неравенства Гельдера с показателями 2, 4, 4 (см., например, [33]), а затем – неравенство (6), получаем

$$\begin{aligned} \left| \int_0^a \frac{du^{(k)}}{dx} \frac{dw^{(k)}}{dx} \frac{dz^{(k)}}{dx} dx \right| &\leq \|u^{(k)}\|_{1,2} \|w^{(k)}\|_{1,4} \|z^{(k)}\|_{1,4} \leq \\ &\leq (C_{14}^{22})^2 \|u^{(k)}\|_{1,2} \|w^{(k)}\|_{2,2} \|z^{(k)}\|_{2,2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Из неравенств (6) и Гельдера с показателями 4 и 4/3 вытекает, что

$$\left| \int_0^a \frac{dz^{(k)}}{dx} \left(\frac{dw^{(k)}}{dx} \right)^3 dx \right| \leq \|w^{(k)}\|_{1,4}^3 \|z^{(k)}\|_{1,4} \leq (C_{14}^{22})^4 \|w^{(k)}\|_{2,2}^3 \|z^{(k)}\|_{2,2}. \quad (9)$$

Далее,

$$\left| \int_0^a \frac{d^2 w^{(k)}}{dx^2} \frac{d^2 z^{(k)}}{dx^2} dx \right| \leq \|w^{(k)}\|_{2,2} \|z^{(k)}\|_{2,2}. \quad (11)$$

Наконец, из теоремы 1 имеем

$$\left| \int_0^a w^{(k)} z^{(m)} dx \right| \leq \|w^{(k)}\|_{0,2} \|z^{(m)}\|_{0,2} \leq (C_{02}^{22})^2 \|w^{(k)}\|_{2,2} \|z^{(m)}\|_{2,2}, \quad k, m = 1, 2, \quad (12)$$

$$\left| \int_0^a q^1 \frac{dz^{(k)}}{dx} dx \right| \leq \|q^1\|_{0,2} \|z^{(k)}\|_{1,2} \leq C_{02}^{12} C_{12}^{22} \|q^1\|_{1,2} \|z^{(k)}\|_{2,2}, \quad (13)$$

$$\left| \int_0^a q^1 \eta^{(k)} dx \right| \leq \|q^1\|_{0,2} \|\eta^{(k)}\|_{0,2} \leq (C_{02}^{12})^2 \|q^1\|_{1,2} \|\eta^{(k)}\|_{1,2}, \quad (14)$$

$$\left| \int_0^a \frac{dw^{(k)}}{dx} y dx \right| \leq \|w^{(k)}\|_{1,2} \|y\|_{0,2} \leq C_{12}^{22} C_{02}^{12} \|w^{(k)}\|_{2,2} \|y\|_{1,2}, \quad (15)$$

$$\left| \int_0^a u^{(k)} y dx \right| \leq \|u^{(k)}\|_{0,2} \|y\|_{0,2} \leq (C_{02}^{12})^2 \|u^{(k)}\|_{1,2} \|y\|_{1,2}, \quad (16)$$

$$\left| \int_0^a q^1 y dx \right| \leq \|q^1\|_{0,2} \|y\|_{0,2} \leq (C_{02}^{12})^2 \|q^1\|_{1,2} \|y\|_{1,2}. \quad (17)$$

Из неравенств (4), (7)–(17) и соотношения (2) следует, что справедлива оценка $|b((U, q^1), (Z, y))| \leq C(U, q^1) \|(Z, y)\|_{V \times V_1}$, где $C(U, q^1)$ – постоянная,

зависящая от U, q^1 и исходных данных задачи. Поэтому в силу теоремы Рисса-Фишера форма $b(\cdot, \cdot)$ порождает оператор $A: W \rightarrow W$, задаваемый формулой

$$b((U, q^1), (Z, y)) = (A(U, q^1), (Z, y))_W \quad \forall (Z, y) \in W, \quad (18)$$

где $(\cdot, \cdot)_W$ – скалярное произведение в W . Более того, справедлива

Теорема 2. Оператор $A: W \rightarrow W$, задаваемый формулой (18), является ограниченным.

Далее, из теоремы 1 вытекает, что справедливы оценки,

$$\left| \int_0^a X_{(k)}^1 \eta^{(k)} dx \right| \leq C_{02}^{12} \|X_{(k)}^1\|_{0,2} \|\eta^{(k)}\|_{1,2}, \left| \int_0^a X_{(k)}^3 z^{(k)} dx \right| \leq C_{02}^{22} \|X_{(k)}^3\|_{0,2} \|z^{(k)}\|_{2,2}, \quad (19)$$

$$\left| \int_0^a M_{(k)}^1 dz^{(k)} / dx dx \right| \leq \|M_{(k)}^1\|_{0,2} \|z^{(k)}\|_{1,2} \leq C_{12}^{22} \|M_{(k)}^1\|_{0,2} \|z^{(k)}\|_{2,2}. \quad (20)$$

Поэтому функционал f , задаваемый формулой (3) порождает элемент $F \in V$ по формуле $(F, Z)_V = f(Z)$, $Z \in V$. Таким образом, задача (1) может быть записана в виде операторного уравнения $A(U, q^1) = F$.

Замечание 1. Как следует из формул (19), (20), элемент корректно определен, если $X_{(k)}^1, X_{(k)}^3, M_{(k)}^1$ принадлежат $L_2(0,1)$. Однако, можно задать оператор $A: W \rightarrow W^* = V_2^* \times V_2^* \times V_1^* \times V_1^* \times V_1^*$, $V_k^* = W_2^{(-k)}(0,1)$, и элемент F из W^* . Таким образом, в рассматриваемом одномерном случае допускаются точечные нагрузки, моделируемые дельта-функциями Дирака [34–39].

3. Заключение.

Проведено построение обобщенной постановки геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем. В дальнейшем будет исследована ее разрешимость полученного операторного уравнения, разработаны и исследованы приближенные методы его решения. При этом будут использованы разработанные в [40–49] подходы.

Литература

1. Старовойтов Э.И. Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки. – Гомель: Белорусский государственный университет, 2002. – 343 с.
2. Макаров М.В., Бадриев И.Б., Паймушин В.Н. Нелинейные задачи о смешанных формах потери устойчивости трехслойных пластин при продольно-поперечном изгибе // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2015. – Т. 20, № 5. – С. 1275–1278.
3. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Контактная постановка задач механики подкреплённых на контуре трехслойных оболочек с трансверсально-мягким заполнителем // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2017. – № 1. – С. 77–85.
4. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Решение нелинейных задач теории многослойных оболочек с трансверсально-мягким заполнителем // В сборнике: Сеточные методы для краевых задач и приложения Материалы Десятой Международной конференции, 2014. – С. 103–107.
5. Paimushin V.N. Problems of geometric non-linearity and stability in the mechanics of thin shells and rectilinear columns // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2007. – V. 71, № 5. – P. 772–805.
6. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Мартынова О.П. Постановка геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // Тенденции науки и образования в современном мире. – 2016. – № 16-1. – С. 5–11.
7. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Мартынова О.П. Операторная формулировка геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // Тенденции науки и образования в современном мире. – 2016. – № 18-3. – С. 5–13.

8. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Макаров М.В. Численное исследование физически нелинейных задач об изгибе трехслойных пластин // В сборнике: Материалы XI Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ2016) Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 2016. – С. 475–477.
9. Бадриев И.Б., Гарипова Г.З., Макаров М.В., Паймушин В.Н., Хабибуллин Р.Ф. О решении физически нелинейных задач о равновесии трехслойных пластин с трансверсально-мягким заполнителем // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2015. – Т. 157, № 1. – С. 15–24.
10. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Гарипова Г.З., Макаров М.В. О разрешимости нелинейной задачи о равновесии трехслойной пластины // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2015. – Т. 20, № 5. – С. 1034–1037.
11. Бадриев И.Б., Гарипова Г.З., Макаров М.В. Сеточные аппроксимации физически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // В сборнике: Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна - 2016. Материалы международной конференции. – Воронеж: Издательско-полиграфический центр «Научная книга», 2016. – С. 70–72.
12. Badriev I.B., Garipova G.Z., Makarov M.V., Paimushin V.N., Khabibullin R.F. Solving physically nonlinear equilibrium problems for sandwich plates with a transversally soft core // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2015. – V. 36, № 4. – P. 474–481.
13. Badriev I.B., Banderov V.V. Numerical solution of the equilibrium of axisymmetric soft shells // Математические методы в технике и технологиях - ММТТ. – 2014. – № 5 (64). – С. 16–20.
14. Badriev I.B., Banderov V.V., Gnedenkova V.L., Kalacheva N.V., Korablev A.I., Tagirov R.R. On the finite dimensional approximations of some mixed variational inequalities // Applied Mathematical Sciences. – 2015. – V. 9, № 113-116. – P. 5697–5705.
15. Бадриев И.Б. Решение вариационных задач нелинейных процессов механики сплошной среды // В книге: Теория управления и математическое моделирование Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова. Удмуртский государственный университет. – Ижевск: Изд-во "Удмуртский университет", 2015. – С. 234–235.
16. Бадриев И.Б. О решении вариационных неравенств второго рода // В сборнике: Сеточные методы для краевых задач и приложения Материалы Девятой Всероссийской конференции. – Казань: Отечество, 2012. – С. 32–35.

17. Бадриев И.Б., Бандеров В.В. Численное моделирование деформирования биокomпозитов // В книге: Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред Материалы XXI международного симпозиума имени А.Г. Горшкова. Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет). – Москва: ООО "ТРИП", 2015. – С. 7–9.
18. Бадриев И.Б., Задворнов О.А. Исследование разрешимости осесимметричной задачи об определении положения равновесия мягкой оболочки вращения // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2005. – № 1. – С. 25–30.
19. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Калачева Н.В. Численное исследование вариационных и квазिवариационных неравенств теории мягких сетчатых оболочек // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2015. – Т. 20, № 5. – С. 1037–1041.
20. Бадриев И.Б., Бандеров В.В. Численное решение задач о равновесии осесимметричных мягких оболочек // Вестник Тамбовского государственного технического университета. – 2015. – Т. 21, № 1. – С. 29–35.
21. Бадриев И.Б., Бандеров В.В. Итерационные методы решения вариационных неравенств теории мягких оболочек // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2013. – Т. 155, кн.2. – С. 18–32.
22. Badriev I.B., Garipova G.Z., Paymushin V.N., Makarov M.V. Numerical solution of the issue about geometrically nonlinear behavior of sandwich plate with transversal soft filler // Research Journal of Applied Sciences. – 2015. – V. 10, № 8. – P. 428–435.
23. Бадриев И.Б., Желтухин В.С., Чебакова В.Ю. О решении некоторых нелинейных краевых и начально-краевых задач // В книге: Материалы XXII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет). – Москва: ООО "ТРИП", 2016. – С. 31–33.
24. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Разрешимость физически и геометрически нелинейной задачи теории трехслойных пластин с трансверсально-мягким наполнителем // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2015. – № 10. – С. 66–71.
25. Макаров М.В., Бадриев И.Б., Паймушин В.Н. Определение критических точек бифуркации для задачи о геометрически нелинейном поведении трехслойной пластины с трансверсально-мягким наполнителем // В сборнике: Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна - 2016. Материалы международной конференции. – Воронеж: Издательско-полиграфический центр «Научная книга», 2016. – С. 292–294.

26. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Исследование задачи об изгибе трехслойной пластины в физически нелинейной постановке // В сборнике: Математическое моделирование и краевые задачи Труды десятой Всероссийской научной конференции с международным участием: в 3-х томах, 2016. – С. 19–24.
27. Макаров М.В. Численное исследование геометрически нелинейной задачи о поперечном изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // Тенденции науки и образования в современном мире. – 2016. – № 17-2. – С. 26–35.
28. Макаров М.В. О решении геометрически нелинейных и линейных задач о поперечном изгибе жестко закрепленной трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // Тенденции науки и образования в современном мире. – 2016. – № 19-2. – С. 23–29.
29. Paimushin V.N., Bobrov S.N. Refined geometric nonlinear theory of sandwich shells with a transversely soft core of medium thickness for investigation of mixed buckling forms // Mechanics of Composite Materials. – 2000. – V. 36, № 1. – P. 59–66.
30. Паймушин В.Н. Обобщенный вариационный принцип Рейсснера в нелинейной механике пространственных составных тел с приложениями к теории многослойных оболочек // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 1987. – № 2. – С. 171.
31. Adams R.A. Sobolev Spaces. – New York, San Francisco, London: Academic Press, 1975. – 286 p.
32. Вайнберг М.М. Вариационный метод и метод монотонных операторов. – М: Наука, 1972. – 416 с.
33. Гаевский Х., Греггер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М: Мир, 1978. – 336 с.
34. Бадриев И.Б. Математическое моделирование процессов механики сплошной среды при наличии точечных источников и нагрузок // В книге: Материалы XXII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет). – Москва: ООО "ТРП", 2016. – С. 28–31.
35. Badriev I.B. Mathematical modeling of continuum mechanics problems with the point sources // В сборнике: Проблемы химмотологии: от эксперимента к математическим моделям высокого уровня. Сборник избранных докладов VI Международной научно-технической конференции, 2016. – С. 19–21.
36. Бадриев И.Б., Фанюк Б.Я. Итерационные методы решения задач фильтрации в многослойных пластах при наличии точечного источника // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2010. – Т. 152, № 4. – С. 39–55.
37. Бадриев И.Б., Сингатуллин М.Т., Чебаков Ю.В. Численное исследование задач подземной установившейся фильтрации высоковязких жидкостей

- при наличии скважин // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2015. – Т. 20, № 5. – С. 1041–1044.
38. Badriev I.B., Banderov V.V., Singatullin M.T. Numerical solution of non-linear filtration issues for high viscous fluids at the presence of wells // Research Journal of Applied Sciences. – 2015. – V. 10, № 8. – P. 343–346.
39. Badriev I.B., Fanyuk B.Y. Iterative methods for solving seepage problems in multilayer beds in the presence of a point source // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2012. – V. 33, № 4. – P. 386–399.
40. Бадриев И.Б., Задворнов О.А. О сходимости итерационного метода двойственного типа решения смешанных вариационных неравенств // Дифференциальные уравнения. – 2006. – Т. 42, № 8. – С. 1115–1122.
41. Бадриев И.Б., Задворнов О.А. Итерационные методы решения вариационных неравенств второго рода с обратно сильно монотонными операторами // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2003. – № 1. – С. 20–28.
42. Желтухин В.С., Чебакова В.Ю., Шнейдер М.Н. Моделирование ВЧЕ-разряда при больших межэлектродных расстояниях // В сборнике: Сеточные методы для краевых задач и приложения. Материалы Девятой Всероссийской конференции. – Казань: Отечество, 2012. – С. 183–186.
43. Абдуллин И.Ш., Желтухин В.С., Чебакова В.Ю., Шнейдер М.Н. Тематическая модель ВЧЕ-разряда в аргоне при больших межэлектродных расстояниях // Вестник Казанского технологического университета. – 2013. – Т. 16, № 22. – С. 334–338.
44. Бикчантаев Д.Х., Желтухин В.С., Чебакова В.Ю. Численное исследование процесса взаимодействия высокочастотного емкостного разряда с материалами // В книге: Теория управления и математическое моделирование. Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова. Удмуртский государственный университет. – Ижевск: Изд-во "Удмуртский университет", 2015. – С. 241–242.
45. Желтухин В.С., Соловьёв С.И., Соловьёв П.С., Чебакова В.Ю. Вычисление минимального собственного значения нелинейной задачи Штурма – Лиувилля // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2013. – Т. 155, № 3. – С. 91–104.
46. Бадриев И.Б., Ляшко А.Д., Панкратова О.В. Исследование сходимости итерационных методов решения нелинейных задач теории фильтрации // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1998. – № 11. – С. 8–13.
47. Бадриев И.Б. Математическое моделирование стационарных задач подземной фильтрации с многозначным законом // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2013. – Т. 18, № 5-2. – С. 2444–2446.

48. Чебакова В.Ю. Моделирование высокочастотного емкостного разряда при атмосферном давлении в аргоне // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2016. – Т. 158, № 3. – С. 404–423.
49. Бадриев И.Б., Нечаева Л.А. Математическое моделирование установившейся фильтрации с многозначным законом // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2013. – № 3. – С. 35–62.