Гацаева Р.С.-А.

Развитие теории комплексных чисел

Чеченский государственный университет
(Россия, Грозный)

doi: 10.18411/lj-12-2019-37

idsp: ljjournal-12-2019-37

Аннотация

В статье прослеживаются различные этапы возникновения и развития теории комплексных чисел от Бамбелли до Гаусса.

Ключевые слова: комплексные числа, математика, квадратные уравнения, квадратный корень, мнимая единица.

Abstract

The article traces the various stages of the emergence and development of the theory of complex numbers from Bambelli to Gauss.

Key words: complex numbers, mathematics, quadratic equations, square root, imaginary unit.

В работе прослеживаются различные этапы возникновения и развития теории комплексных чисел от Бамбелли до Гаусса. Древнегреческие математики считали, что стоят внимания только натуральные числа. У математиков постепенно складывалось представление о бесконечности множества натуральных чисел. В III веке Архимед разработал систему обозначения вплоть до такого большого $10^{8 \cdot 10^{16}}$. Наряду с натуральными числами применяли дроби - числа, составленные из целого числа долей единицы. В практических расчетах дроби применялись за две тысячи лет до н. э. в древнем Египте и древнем Вавилоне. Долгое время полагали, что результат измерения всегда выражается или в виде натурального числа, или в виде отношения таких чисел, то есть дроби. Древнегреческий философ и математик Пифагор учил, что элементы чисел являются элементами всех вещей и весь мир в целом является гармонией и числом. Сильнейший удар по этому взгляду был нанесен открытием, сделанным одним из пифагорейцев. Он доказал, что диагональ квадрата несоизмерима со стороной. Отсюда следует, что натуральных чисел и дробей недостаточно, для того чтобы выразить длину диагонали квадрата со стороной 1. Есть основание утверждать, что именно с этого открытия начинается эра теоретической математики: открыть существование несоизмеримых величин с помощью опыта, не прибегая к абстрактному рассуждению, было невозможно. Следующим важным этапом в развитии понятия о числе было введение отрицательных чисел - это было сделано китайскими математиками за два века до н. э. Отрицательные числа применяли в III веке древнегреческий математик Диофант, знавший уже правила действия над ними, а в VII веке эти числа уже подробно изучили индийские ученые, которые сравнивали такие числа с долгом. С помощью отрицательных чисел можно было единым образом описывать изменения величин. Уже в VIII веке было установлено, что квадратный корень из положительного числа имеет два значения положительное и отрицательное, а из отрицательных чисел квадратный корень извлекать нельзя: нет такого числа x , чтобы $x^2 = -9$.

В XVI веке в связи с изучением кубических уравнений оказалось необходимым извлекать квадратные корни из отрицательных чисел. В формуле для решения кубических уравнений вида

$$x^3 + px + q = 0$$

кубические и квадратные корни:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{-\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}};$$

Эта формула хороша в случае ,если уравнение имеет один действительный корень

$$x^3 + 3x - 4 = 0,$$

а если оно имеет три действительных корня

$$(x^3 - 7x + 6 = 0),$$

то под знаком квадратного корня окажется отрицательное число . А извлекать корень из отрицательного корня не умели. Скоро были решены и уравнения и четвертой степени ,математики усиленно искали формулу решения уравнений пятой степени. Но Руффини (Италия) на рубеже XVIII и XIX веков доказал, что буквенное уравнение пятой степени

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0,$$

нельзя решить алгебраически; точнее: нельзя выразить его корень через буквенные величины a, b, c, d, e , с помощью шести алгебраических действий (сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня)

В 1830 году Галуа (Франция) доказал, что никакое общее уравнение, степень которого больше чем 4, нельзя решить алгебраически. Тем не менее всякое уравнение n -й степени имеет (если рассматривать и комплексные числа) n корней (среди которых могут быть и равные). В этом математики были убеждены еще в XVII веке (основываясь на разборе многочисленных частных случаев), но лишь на рубеже XVIII и XIX веков упомянутая теорема была доказана Гауссом. Итальянский алгебраист Дж. Кардано в 1545 г. предложил ввести числа новой природы. Он показал, что система уравнений

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x \cdot y = 40 \end{cases},$$

не имеющая решений во множестве действительных чисел, имеет решения вида

$$x = 5 \pm \sqrt{-15}, \quad y = 5 \mp \sqrt{-15},$$

нужно только действовать над такими выражениями по правилам обычной алгебры и считать ,что

$$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-a} = a,$$

Кардано называл такие величины “чисто отрицательными” и даже, считал их бесполезными и старался их не употреблять. С помощью таких чисел нельзя выразить ни результат измерения какой-нибудь величины, ни изменение какой-нибудь величины. Но уже в 1572 году вышла книга итальянского алгебраиста Р. Бомбелли, в которой были установлены первые правила арифметических операций над такими числами, вплоть до извлечения из них кубических корней. Название «мнимые числа» ввел в 1637 году французский математик и философ Р. Декарт, а в 1777 году один из крупнейших математиков XVIII века - Л.Эйлер предложил использовать первую букву французского слова *imaginaire* (мнимый) для обозначения числа $\sqrt{-1}$ (мнимой единицы). Этот символ вошел во всеобщее употребление благодаря К. Гауссу. Термин «комплексные числа» так же был введен Гауссом в 1831 году. Слово комплекс (от латинского *complexus*) означает связь, сочетание, совокупность понятий, предметов, явлений и т. д., образующих единое целое.

В течение XVII века продолжалось обсуждение арифметической природы мнимых чисел, возможности дать им геометрическое обоснование. Постепенно развивалась техника операций над мнимыми числами. На рубеже XVII и XVIII веков была построена общая теория корней n -ых степеней сначала из отрицательных, а затем из любых комплексных чисел, основанная на следующей формуле английского математика А. Муавра (1707).

$$(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))^n = \cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi$$

С помощью этой формулы можно было так же вывести формулы для косинусов и синусов кратных дуг. Л. Эйлер вывел в 1748 году замечательную формулу :, которая связывала воедино показательную функцию с тригонометрической. С помощью формулы Л. Эйлера можно было возводить число e в любую комплексную степень. Любопытно, например, что $e^{in}=1$. Можно находить $\sin$ и $\cos$ от комплексных чисел, вычислять логарифмы таких чисел, то есть строить теорию функций комплексного переменного. В конце XVIII века французский математик Ж. Лагранж смог сказать, , что математический анализ уже не затрудняют мнимые величины. С помощью мнимых чисел научились выражать решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Такие уравнения встречаются, например, в теории колебаний материальной точки в сопротивляющейся среде. Еще раньше швейцарский математик Я. Бернулли применял комплексные числа для решения интегралов. Хотя в течение XVIII века с помощью комплексных чисел были решены многие вопросы, в том числе и прикладные задачи, связанные с картографией, гидродинамикой и т. д., однако еще не было строго логического обоснования теории этих чисел. По этому французский ученый П. Лаплас считал, что результаты, полученные с помощью мнимых чисел, только наведение, приобретающее характер настоящих истин лишь после подтверждения прямыми доказательствами.» В конце XVIII века, в начале XIX века было получено геометрическое истолкование комплексных чисел. Датчанин К. Вессель, француз Ж. Арган и немец К. Гаусс независимо друг от друга предложили изобразить комплексное число

$$z = a + i \cdot b$$

точкой $M(a, b)$ точкой на координатной плоскости. Позднее оказалось, что еще удобнее изображать число не самой точкой M , а вектором $\overrightarrow{OM}$, идущим в эту точку из начала координат. При таком истолковании сложение и вычитание комплексных чисел соответствуют эти же операции над векторами. Вектор $\overrightarrow{OM}$ можно задавать не только его координатами a и b , но так же длиной r и углом φ , который он образует с положительным направлением оси абсцисс

$$a = r \cdot \cos \varphi, \quad b = r \cdot \sin \varphi$$

и число z принимает вид

$$z = r(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)),$$

называется тригонометрической формой комплексного числа. Число r называют модулем комплексного числа z и обозначают $|z|$. Число φ называют аргументом z и обозначают $\text{Arg } Z$. Заметим, что если $z = 0$, значение $\text{Arg } Z$ не определено, а при $z \neq 0$ определено с точностью до кратного 2π . Упомянутая ранее формула Эйлера позволяет записать число z в виде

$$z = r e^{i\varphi}$$

(показательная форма комплексного числа). Геометрическое истолкование комплексных чисел позволило определить многие понятия, связанные с функцией комплексного переменного, расширило область их применения. Стало ясно, что комплексные числа полезны во многих вопросах, где имеют дело с величинами, которые изображаются векторами на плоскости: при изучении течения жидкости, задач теории упругости. После создания теории комплексных чисел возник вопрос о существовании «гиперкомплексных» чисел - чисел с несколькими «мнимыми» единицами. Такую систему вида

$$a + bi + ci + dk,$$

где

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

коммутативности (переместительности) например

$$i \cdot j = k, \quad ji = -k$$

Любопытно, что дробные числа, более сложные, чем отрицательные, были известны уже в Древнем Египте, Вавилонии и Греции, где использовались без каких-либо затруднений. Неприятие отрицательных корней уравнений лежит больше на психологическом уровне, чем на понятийном. Рассмотрим несколько простых уравнений, нахождение решения каждого из которых становилось важной вехой в истории математики. Уравнение вида

$$x + 1 = 0$$

не имеет решения для тех, кто не знает о существовании отрицательных чисел, так как единственным корнем уравнения является

$$x = -1$$

Если же считать, что это уравнение определено на множестве целых чисел Z (положительных и отрицательных), то мы легко сможем найти решение. В данном случае $x = -1$

Тем не менее для древних подобные рассуждения были не столь просты.

Например: Диофант отрицал существование отрицательных чисел, а вместе с ними и все уравнения, которые имели отрицательные корни. В культуре Древней Индии, которую можно считать очень развитой в математическом отношении, отрицательные числа впервые упоминаются лишь в 628 году. Но даже тогда они использовались только для обозначения долгов, причем с многочисленными оговорками.

Уравнение вида

$$2x - 4 = 0$$

не представляло трудностей и решалось по методу, который мы уже объясняли:

$$2x = 4$$

Однако уравнение

$$2x - 1 = 0$$

не имеет решения на множестве целых чисел, так как его корень $x = \frac{1}{2}$ не принадлежит к множеству Z

Для решения этой задачи нужно допустить существование множества рациональных чисел Q (Напомним, что рациональное число можно представить в виде дроби с целым числителем и натуральным знаменателем.) Любопытно, что дробные числа, более сложные, чем отрицательные, были известны уже в Древнем Египте, Вавилонии и Греции, где использовались без каких-либо затруднений. Неприятие отрицательных корней уравнений лежит больше на психологическом уровне, чем на понятийном. Это не должно удивлять. Любой из нас может провести небольшой эксперимент и спросить знакомых, сколько будет 4 минус 7. Мы убедимся, что заметная часть населения не знает о существовании отрицательных чисел.

На следующем этапе развития математики началось изучение уравнений вида

$$2x - 2 = 0$$

Перенеся двойку в правую часть уравнения, мы получим

$$2x = 2$$

Для решения этого уравнения нам недостаточно четырех арифметических действий (сложения, вычитания, умножения и деления), которыми мы пользовались до этого. Здесь требуется извлечь корень, в данном случае квадратный, чтобы получить решение: $x = \sqrt{2}$. Вспомним, что квадратным корнем числа называется такое число, которое при возведении в квадрат дает исходное число. Например,

$$\sqrt{4} = 2, \text{ так как } 2 + 2 = 2 \times 2 = 4.$$

Аналогично

$$\sqrt{16} = 4.$$

Для решения нашего уравнения нам нужно найти число, которое при возведении в квадрат дало бы 2. Здесь происходит качественный скачок, ведь ни одно из рациональных чисел не превращается в 2, будучи возведенным в квадрат. Этот факт, обнаруженный еще учениками пифагорейской школы, привел к введению понятия иррациональных чисел, одним из которых является $\sqrt{2}$.

Рациональные числа в купе с иррациональными составляют $\mathbb{R}$ множество вещественных чисел. Уравнения, подобные приведенному выше, имеют решения на этом множестве. Располагая огромным множеством вещественных чисел $\mathbb{R}$, мы можем подумать, что на нем будет иметь решение любое уравнение. Увы, это не так: существуют уравнения, от которых долгое время математики бежали как от огня. Простейшим из них является

$$2x + 1 = 0$$

Существует правило знаков, которое гласит: «минус на минус дает плюс», то есть произведение отрицательных чисел всегда будет положительным.

Например,

$$(-3) \times (-2) = 6.$$

Следовательно, любое число при умножении на само себя никогда не даст отрицательный результат. Если исходное число положительное, например 3, его квадратом будет 9. Если оно отрицательное, то все равно

Квадратом

$$(-3) \times (-3) = 9.$$

По этой причине утверждалось, что квадратных корней из отрицательных чисел не существует, следовательно, уравнение

$$2x + 1 = 0$$

не имеет решений. Джероламо Кардано (1501-1576) предчувствовал, что за подобными корнями уравнений скрывается нечто интересное. Затем Рафаэль Бомбелли (1526-1572) стал рассматривать их как числа и определил для них четыре основных арифметических действия. Несмотря на это, подобные решения начали признавать лишь спустя несколько столетий. Даже Декарт отрицал существование мнимых корней уравнений. Более того, он первым назвал такие числа «воображаемыми». Ньютон также не придавал им особого значения. Тем не менее корни уравнений подобного типа существуют и называются мнимыми или комплексными.

Только благодаря работам Гамильтона, Гаусса и Аргана комплексные числа стали считаться полноценными числами.

Множество $\mathbb{C}$ множество комплексных чисел включает в себя все прочие множества чисел: натуральные, целые, рациональные и вещественные. Если бы математики не относились с подозрением к «закрытым» темам, можно было бы сказать, что у этой истории счастливый конец, так как доказано, что любое уравнение с комплексными коэффициентами имеет решение на множестве $\mathbb{C}$. Так утверждается в теореме, носящей своеобразное название «Основная теорема алгебры».

Ее доказал в своей докторской диссертации «принц математиков» Карл Фридрих Гаусс в 1799 году, когда ему было 19 лет. Теорема приобрела широкую известность в математическом мире.

Большой вклад в развитие теории функций комплексного переменного внесли русские и советские ученые Н. И. Мусхелишвили занимался ее применениями к упругости, М. В. Келдыш и М. А. Лаврентьев, Н. Н. Богомолов и В. С. Владимиров к проблемам квантовой теории поля.

1. М.Я.Выгодский ; Справочник по элементарной математике М.,наука 2010 г.
2. Выгодский Я. М.: АСТ: Астрель,2010. Справочник по высшей математике.
3. «Энциклопедический словарь математика»
4. А.В.Савин.-М.: Педагогика ,2010 г.