РАЗДЕЛ I. ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

Буй Тхань Трунг¹, Зоан Куи Хиеу²

Напряженное состояние прямоугольной пластины при термомеханическом нагружении методом Бубнова – Галёркина

¹Университет Народной Полиции
(Вьетнам, Хошимин)²Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет)
(Россия, Москва)

doi: 10.18411/lj-12-2019-01

ids: lj-12-2019-01

Аннотация

Рассматривается прямоугольная пластина постоянной толщины, находящаяся при совместном действии распределительной нагрузки и температурного нагрева. Полные деформации равны сумме этих двух частей, в любой ортогональной системе координат связаны с напряжениями нагрузки и температурой. На основании уравнений теории упругости и метода Бубнова – Галёркина построена математическая модель напряженного состояния для рассматриваемой пластины. Математическая модель представляет собой систему линейных алгебраических уравнений в перемещениях с постоянными коэффициентами и естественные граничные условия на краях пластины. Дан анализ напряжений, соответствующих постановке задачи, при воздействии температуры.

Ключевые слова: прямоугольная пластина, постоянная толщина, температура, термоупругость, метод Бубнова – Галёркина.

Abstract

A rectangular plate of constant thickness, which is under the combined action of distribution load and thermal heating, was considered. The total deformations were equal to the sum of these two parts, which were associated with load stresses and temperature in any orthogonal coordinate system. Based on the equations of elasticity theory and the Bubnov-Galerkin method, a mathematical model of the stress state for the plate under consideration was constructed. The mathematical model was a system of linear algebraic equations in displacements with constant coefficients and natural boundary conditions at the edges of the plate. An analysis of stresses corresponding to the problem statement under the influence of temperature was given.

Key words: rectangular plate, constant thickness, temperature, thermo-elasticity, Bubnov-Galerkin method.

Введение

Пластины достаточно широко применяются в различных областях техники: авиации, судостроении и машиностроении. Это объясняется тем, что присущая тонкостенным конструкциям лёгкость сочетается с их высокой несущей способностью и технологичностью. Решение задач напряженно-деформированного состояния (НДС) пластины сводится к интегрированию дифференциальных уравнений в частных производных с заданными граничными условиями. Точное решение многих важных практических задач до сих пор не получено, так как решение упомянутых дифференциальных уравнений представляет собой большие математические трудности. Поэтому большое значение приобрели так называемые вариационные методы решения задач, основанные на вариационных принципах теории упругости [1, 2, 3].

Вариационные принципы позволяют находить приближённые эффективные решения задач в тех случаях, когда классический путь интегрирования основных уравнений теории упругости невозможен или затруднителен. Таким образом, сущность вариационных методов заключается в сведении решения одного или нескольких дифференциальных уравнений в частных производных к реализации системы линейных алгебраических уравнений. Одним из вариационных методов приближённого решения является метод Бубнова – Галёркина. На основе ортогональных функций, применим этот метод к решению уравнения Софи-Жермен [4, 5].

Для решения задач термоупругости изотропной прямоугольной пластины постоянной толщины применяется эффективный метод аналитического решения системы линейных алгебраических уравнений с постоянными коэффициентами. В работе [6, 7] используется метод конечных разностей, который имеет определенные преимущества для решения задач пластины. Следует отметить в работах [8, 9] рассматриваются асимптотические методы при расчета НДС прямоугольной пластины.

В данной работе при построении расчета НДС прямоугольной пластины постоянной толщины при совместном действии механических нагрузок и температур используется подход [4, 5]. В соответствии с ним полные деформации в каждой точке пластины состоят из суммы двух частей. Первая часть пропорциональна повышению температуры, а вторая часть представляет собой деформации, возникающие под действием внешних нагрузок. В качестве примера рассматривается НДС изотропной пластины под действием распределенной нагрузки и температуры. Дан анализ влияния температуры на её напряженное состояние.

Постановка задачи

Рассмотрим упругое равновесие прямоугольной изотропной пластины, нагруженной поперечной распределенной нагрузкой $q(x, y)$ при наличии перепада температур по поверхностям пластины $\Delta T(x, y)$, отнесенной к системе координат (x, y, z) (рис. 1). Обозначим через a и b длина и ширина пластины, а через h - её постоянную толщину. Края пластины $x=0$, $x=a$ и $y=0$, $y=b$ могут быть свободными, шарнирно опертыми и жестко защемленными. Предположим, что верхняя поверхность прямоугольной пластины имеет температуру $T_0(x, y)$, а нижняя поверхность - $T_1(x, y)$. Полагаем, что перепад температуры $\Delta T = T_1 - T_0$ таков, что нагрев не изменяет механических свойств материала пластины.

Рис. 1. Прямоугольная пластина

Полные деформации от суммы нагрузок и температурных воздействий представляются в виде

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x(q) + \varepsilon_x(T), \quad \varepsilon_y = \varepsilon_y(q) + \varepsilon_y(T), \quad \gamma_{xy} = \gamma_{xy}(q) + \gamma_{xy}(T), \quad (1)$$

где $\varepsilon_x(q), \varepsilon_y(q), \gamma_{xy}(q)$ – деформации от механической нагрузки и $\varepsilon_x(T), \varepsilon_y(T), \gamma_{xy}(T)$, – деформации от температурных воздействий.

При перепаде ΔT температур тела, деформации определяются по формулам:

$$\varepsilon_x(T) = \varepsilon_y(T) = \alpha T, \quad \gamma_{xy}(T) = 0. \quad (2)$$

где α – коэффициент температурного расширения материала пластины.

Компонент тензора напряжений в пластине

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x), \quad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}, \quad (3)$$

где E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона.

Поставим выражения (1), (2) в (3) получим

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}[\varepsilon_x(q) + \nu\varepsilon_y(q) + (1+\nu)\alpha T] = \frac{-Ez}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^2 w(q)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w(q)}{\partial y^2} + (1+\nu)\alpha T \right],$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}[\varepsilon_y(q) + \nu\varepsilon_x(q) + (1+\nu)\alpha T] = \frac{-Ez}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^2 w(q)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w(q)}{\partial x^2} + (1+\nu)\alpha T \right],$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}(q) = \frac{-Ez}{1+\nu} \frac{\partial^2 w(q)}{\partial x \partial y}, \quad (4)$$

где искомая функция прогиба $w(x,y)$ в выражений (4) должна удовлетворять этому уравнению, а также граничным условиям на краях пластины.

Согласно этому методу, функция прогибов $w(x,y)$ заменяется её приближённым значением в виде двойного ряда:

$$w_{mm}(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} X_i(x) Y_j(y), \quad (5)$$

где c_{ij} – постоянные параметры, подлежащие определению; $X_i(x), Y_j(y)$ – базисные функции, которые выбираются так, чтобы удовлетворять геометрическим и статическим граничным условиям задачи.

Уравнение прогиба пластины представляется в виде

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - q = 0, \quad (6)$$

где D – цилиндрическая жесткость пластины, q – нагрузка.

Согласно которому дискретная пластины будет находиться в равновесии, из выражений (5) и (6) запишем уравнение Бубнова – Галёркина:

$$\iint_S \left[D \left(\frac{\partial^4 w_{mm}}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_{mm}}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_{mm}}{\partial y^4} \right) - q \right] X_i(x) Y_j(y) dx dy = 0. \quad (7)$$

Полученное интегральное уравнение (7) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно неизвестных параметров c_{ij} . Решение СЛАУ приводит к определению величин параметров c_{ij} и получению окончательного выражения для вычисления функции $w_m(x, y)$. Поставим функцию прогиба в выражениях (4) получим компонент напряжений пластины.

Пример расчёта НДС прямоугольной пластины

Рассмотрим пример расчета прямоугольной пластины, нагруженной распределительной нагрузкой $q(x, y) = Q_0 = \text{const}$. Разность температуры между верхней и нижней поверхностями зададим линейной функцией $\Delta T = f(x) = 20x/a + 30 [^{\circ}\text{C}]$. На рис. 1 представлена расчётная схема пластины. Числовые данные для расчета пластины следующие: $a = 4$ м; $b = 4$ м; $h = 0,2$ м; $Q_0 = 5 \cdot 10^4$ Па; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\nu = 0,3$.

Воспользуемся постановкой задачи, когда в приближённом выражении для прогиба

$$w(x, y) = c\varphi(x, y) = c(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}) \sin \frac{\pi y}{b}, \quad (8)$$

Согласно условным обозначениям на расчётной схеме, грани АК и ВL пластины зашпелены, а грани АВ и КL – шарнирно опёрты. Заданная функция $w(x, y)$ прогибов (8) удовлетворяет всем граничным условиям на контуре пластины. Используем метод Бубнова - Галёркина, результаты вычислений нормальных напряжений пластины зависимости от перепада температуры представлены на рис. 2-5.

Рис. 2. Изменение σ_x по длине в зависимости от температуры

Рис. 3. Изменение σ_x по ширине в зависимости от температуры

Из графика можно заметить, что температура изменяется по линейной функции по длине пластины, поэтому напряжения также зависят от функции температуры. А по ширине пластины, нормальные напряжения изменяются пропорционально температуре. Кроме того, игнорируя воздействие температуры, полученные результаты

в этой статье, имеют то же значения в работах Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. и Новожилова В.В.

$$|\sigma_{x \max}| = 5,27 \cdot 10^6 \text{ МПа}, \quad |\sigma_{y \max}| = 3,67 \cdot 10^6 \text{ МПа}.$$

Рис. 4. Изменение σ_y по длине в зависимости от температуры

Рис. 5. Изменение σ_y по ширине в зависимости от температуры

Таким образом, метод Бубнова - Галёркина, в отличие от численных методов, позволяет получать приближённое аналитическое решение задачи для дифференциального уравнения. Имея выражение для прогиба, можно вычислить параметры НДС пластины в любой её точке пластины.

Заключение

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы:

1. На основании метода Бубнова - Галёркина, построена математическая модель расчета НДС прямоугольной пластины постоянной толщины, позволяющая учитывать условия термомеханического нагружения.
2. Показано, что при расчете пластины, дополнительные напряжения влияния температуры приводит к существенным изменениям НДС прямоугольной пластины по длине и ширине.
3. Учет влияния температуры на НДС прямоугольной пластины позволяет получить существенно более точные величины напряжений термоупругости. Этот результат позволяет с удовлетворительной точностью предсказывать уровень твердости, прочности, пластичности, динамической трещиностойкости, температуры воздействия при расчете НДС пластины.

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. –М.: Наука, 1966. – 636 с.
2. Филоненко-Бородич, М.М. Теория упругости. – М. : Изд-во физ.-мат. лит-ры, 1959. – 364 с.
3. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. –939с.
4. Новожилов В.В. Теория упругости. М.: Судпромгиз, 1958. –373с.
5. Коваленко А. Д. Основы термоупругости. Изд-во: Наукова думка, 1970. –309 с.
6. Roknuzzaman Md, Hossain Md, Haque Md. Rashedul, Ahmed Dr 2015 Analysis of Rectangular Plate with Opening by Finite Difference Method American Journal of Civil Engineering and Architecture 3 pp 165-173. DOI: 10.12691/ajcea-3-5-3.
7. Pisacic Katarina, Horvat Marko, Botak Zlatko 2019 Finite difference solution of plate bending using Wolfram Mathematica Tehnički glasnik 13 pp 241-247. DOI: 10.31803/tg-201903281117088.
8. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. –512 с.
9. Образцов И. Ф., Нерубайло Б. В., Андрианов И. В. Асимптотические методы в строительной механике тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1991. –416 с.